

FAURE

**Transformation des propriétés
métriques des figures**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 189-195

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__189_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir t. XVIII, p. 381);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

APPLICATIONS.

I. *Relation entre des points situés sur une même droite.*

Si l'on a entre des points $a', b', c', d',$ etc., situés sur une même droite une relation homogène

$$F(a' b', c' d', \dots) = 0,$$

on aura entre les points correspondants a, b, c, d de la figure homographique la relation

$$F \left(\frac{ab}{\alpha \cdot \beta}, \frac{cd}{\gamma \cdot \delta}, \dots \right) = 0,$$

les lettres grecques désignant les distances des points a, b, c , etc., α une droite fixe I.

Car, d'après la formule (1), les valeurs de R et de $\sin(c, 1)$ restent les mêmes dans l'expression de chacun des segments $a' b', c' d'$, etc. Au moyen des différentes formules indiquées (9), on pourra mettre la relation précédente sous d'autres formes.

1°. Des points $a', b', c', \dots, e', f'$ se succédant sur une droite d'une manière quelconque

$$a' b' + b' c' \dots e' f' = a' f'$$

dans la figure homographique, on aura

$$\frac{ab}{\alpha \cdot \beta} + \frac{bc}{\beta \cdot \gamma} \dots \frac{ef}{\varepsilon \cdot \varphi} = \frac{af}{\alpha \cdot \varphi}.$$

2°. Deux cercles de centre o' et o'_1 se touchant en un point a' , on a

$$o' a' + a' o'_1 = o' o'_1.$$

La figure homographique donne ce théorème :

Lorsque deux coniques se touchent en un point a , elles se coupent en deux autres points p et p_1 , réels ou imaginaires; si l'on prend les pôles o et o_1 de la droite pp_1 dans les deux coniques, la droite oo_1 passera par le point a , et si l'on appelle ω, ω_1, α les distances des points o, o_1, a à la droite pp_1 , on aura

$$oa \cdot \omega_1 + ao_1 \cdot \omega = oo_1 \cdot a.$$

Ce théorème est susceptible de plusieurs corollaires.

II. Relation entre des segments situés sur des droites parallèles.

La formule (3), dans laquelle R restera constant, montre que :

Si l'on a une relation homogène

$$F(a' b', c' d' \dots) = 0$$

entre des segments $a' b', c' d', \dots$ situés sur des droites parallèles, on aura dans la figure homographique la relation

$$F\left(\frac{I}{\alpha} - \frac{I}{\beta}, \frac{I}{\gamma} - \frac{I}{\delta} \dots\right) = 0,$$

dans laquelle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les distances des points correspondants a, b, c, d à une droite fixe I.

1° Dans un parallélogramme $a' b' c' d'$ les côtés opposés tels que $a' b'$ et $c' d'$ sont égaux. De là : Étant donné un quadrilatère $abcd$, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances de ses sommets à la diagonale extérieure, on a

$$\frac{I}{\alpha} - \frac{I}{\beta} = \frac{I}{\gamma} - \frac{I}{\delta}.$$

2°. Si l'on coupe deux droites parallèles A', B' par des droites issues d'un point arbitraire, en des points $a', b', c', d', \dots, a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, \dots$, on a la relation

$$\frac{a' b'}{a'_1 b'_1} = \frac{b' c'}{b'_1 c'_1} = \frac{c' d'}{c'_1 d'_1} = \dots$$

Dans la figure homographique nous avons deux droites **A** et **B** se coupant sur une droite I, et un faisceau de droites rencontrant les premières aux points $a b c \dots a_1 b_1 c_1$, etc., et si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ les distances

de ces points à la droite I, on a

$$\frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1}} = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\gamma_1}} = \dots$$

3°. Considérons deux polygones ayant leurs côtés $a'b'$, $a'_1b'_1$, $b'c'$, $b'_1c'_1$, etc., respectivement parallèles; on a

$$\frac{a'b'}{a'_1b'_1} = \frac{b'c'}{b'_1c'_1} = \text{constante.}$$

La figure homographique donne deux polygones dont les côtés vont se couper deux à deux sur une droite I; donc *Étant donnés deux polygones homologues, si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, les distances des sommets correspondants à l'axe d'homologie,*

$$\frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_1}} = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\gamma_1}} \dots = \text{constante.}$$

III. Relation entre des points situés sur une conique.

Si l'on considère une corde $a'b'$ d'un cercle, sa longueur est donnée généralement [formule (2)] par la relation

$$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}}{pp_1} \frac{ab\sqrt{\pi \cdot \pi_1}}{\alpha \cdot \beta}} \quad (\text{t. XVIII, p. 383});$$

ab sera la corde d'une conique correspondant au cercle donné, α, β les distances des points a et b à la droite pp_1 qui correspond à l'infini de la première figure, π et π_1 sont la distance des points p et p_1 de la conique au segment ab .

Soient P et A les diamètres de la conique parallèles

(193)

aux droites pp_1 et ab , d'après une propriété bien connue
(que nous démontrerons plus loin)

$$\frac{\pi \pi_1}{\alpha \cdot \beta} = \frac{P^2}{A^2},$$

la formule ci-dessus devient

$$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}P^2}{PP_1}} \cdot \frac{ab}{A\sqrt{\alpha\beta}};$$

nous déduirons de là que : *Si l'on a entre des points situés sur un cercle la relation homogène*

$$F(a'b', c'd', \dots) = 0,$$

on aura entre les points de la conique correspondante la relation

$$F\left(\frac{ab}{A\sqrt{\alpha\beta}}, \frac{cd}{B\sqrt{\gamma\delta}}, \dots\right) = 0,$$

dans laquelle A, B, ... sont les diamètres de la conique parallèles aux cordes ab, cd, ..., $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ les distances de leurs extrémités à une droite fixe I.

Si l'on suppose que cette droite fixe est à l'infini, on a simplement

$$F\left(\frac{ab}{A}, \frac{cd}{B}, \dots\right) = 0$$

pour relation correspondante.

1°. Lorsque deux cercles sont concentriques, la corde $a'b'$ de l'un, tangente à l'autre, est de longueur constante. De là : *Lorsque deux coniques ont un double contact suivant une droite I, si l'on mène à l'une une tangente et que l'on appelle ab la portion de cette tangente comprise dans l'autre, et A le diamètre de celle-*

est parallèle à la tangente

$$\frac{ab}{A\sqrt{\alpha \cdot \beta}} = \text{constante},$$

α et β étant les distances des points a et b à la droite I .

Si la seconde conique est un cercle dont A est le diamètre, on a

$$\frac{ab}{\sqrt{\alpha \cdot \beta}} = \text{constante}.$$

Si les deux coniques sont homothétiques,

$$\frac{ab}{A} = \text{constante}.$$

2°. Lorsqu'un quadrilatère $a' b' c' d'$ est inscrit dans un cercle

$$a' b' \cdot c' d' + b' c' \cdot d' a' = a' c' \cdot b' d'.$$

Comme correspondant à ce théorème, on trouve celui-ci :
Un quadrilatère $abcd$ étant inscrit dans une conique, si l'on appelle A, B, C, D, E, F les diamètres de la conique parallèles aux côtés, pris successivement, et aux diagonales, on a la relation

$$\frac{ab \cdot cd}{A \cdot C} + \frac{bc \cdot da}{B \cdot D} = \frac{ac \cdot bd}{E \cdot F}.$$

3°. Si l'on joint un point arbitraire m' d'un cercle aux extrémités a' et b' d'un diamètre

$$\overline{ma'}^2 + \overline{mb'}^2 = \overline{ab'}^2.$$

D'où ce théorème : *Étant donné une droite I et son pôle o , relativement à une conique, menons par ce point une droite arbitraire rencontrant la conique aux points a et b ; m étant un point de la conique, A, B, C ses*

(195)

diamètres parallèles aux droites ab , ma , mb , et enfin α , β , μ les distances des points a , b , m à la droite I , on a la relation

$$\frac{am^2}{B^2} \cdot \beta + \frac{bm^2}{C^2} \cdot \alpha = \frac{ab^2}{A^2} \cdot \mu.$$

Si la droite I est à l'infini, ab est un diamètre de la conique, et l'on a

$$\frac{am^2}{B^2} + \frac{bm^2}{C^2} = \frac{ab^2}{A^2}.$$

(La suite prochainement)