Solution de la question 515

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 181-182

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__181_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 515

(voir p. 95);

PAR UN PROFESSEUR.

L'énoncé doit être rectifié comme il suit :

Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \ldots \alpha_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

dans lequel les indices supérieurs sont des exposants, est égal au produit

$$P = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n (\alpha_n - \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-2}) \ldots (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3}) \ldots (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Ce théorème, ordinairement attribué à Vandermonde (*), est démontré de deux manières dans le savant Traité de M. Brioschi (p. 90 de la traduction française). La démonstration suivante, due, je crois, à Cauchy et qui ne suppose que les premières propriétés des déterminants, paraîtra plus simple.

Il est d'abord évident que tous les termes de Δ sont divisibles par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Ensuite si l'on suppose $\alpha_2 = \alpha_1$, Δ s'annule, puisque

(*) Vandermonde (A. S, 1771, p. 369) décompose en facteur un polynôme qui peut être considéré comme un déterminant du 3e ordre : mais rien n'indique qu'il ait eu en vue le théorème général, ni même qu'il ait considéré ce polynôme comme un déterminant.

deux colonnes du déterminant deviennent identiques. Donc Δ est divisible par $\alpha_2 - \alpha_1$. On verra de même que Δ est divisible par toutes les différences des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ prises deux à deux.

Donc Δ est divisible par P, et puisque Δ et P sont évidemment du même degré, ils ne peuvent différer que par une constante. Mais le terme $\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 \ldots \alpha_n^n$ a le même signe dans Δ et dans P. Donc $\Delta = P$. C. Q. F. D.

Il résulte de ce théorème que le produit P représente symboliquement le déterminant Δ quand les exposants se changent en indices

Note sur la question 516.

Elle a déjà été résolue t. XVII, p. 331.