

Solution de la question 515

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 181-182

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__181_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 515

(voir p. 95);

PAR UN PROFESSEUR.

L'énoncé doit être rectifié comme il suit :
Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

dans lequel les indices supérieurs sont des exposants, est égal au produit

$$P = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (\alpha_n - \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-2}) \dots (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3}) \dots (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Ce théorème, ordinairement attribué à Vandermonde (*), est démontré de deux manières dans le savant Traité de M. Brioschi (p. 90 de la traduction française). La démonstration suivante, due, je crois, à Cauchy et qui ne suppose que les premières propriétés des déterminants, paraîtra plus simple.

Il est d'abord évident que tous les termes de Δ sont divisibles par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Ensuite si l'on suppose $\alpha_2 = \alpha_1$, Δ s'annule, puisque

(*) Vandermonde (A. S, 1771, p. 369) décompose en facteur un polynôme qui peut être considéré comme un déterminant du 3^e ordre : mais rien n'indique qu'il ait eu en vue le théorème général, ni même qu'il ait considéré ce polynôme comme un déterminant.

deux colonnes du déterminant deviennent identiques. Donc Δ est divisible par $\alpha_2 - \alpha_1$. On verra de même que Δ est divisible par toutes les différences des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ prises deux à deux.

Donc Δ est divisible par P , et puisque Δ et P sont évidemment du même degré, ils ne peuvent différer que par une constante. Mais le terme $\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 \dots \alpha_n^n$ a le même signe dans Δ et dans P . Donc $\Delta = P$. C. Q. F. D.

Il résulte de ce théorème que le produit P représente symboliquement le déterminant Δ quand les exposants se changent en indices

Note sur la question 516.

Elle a déjà été résolue t. XVII, p. 331.