NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DEWULF

Mémoire sur les polaires inclinées

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 175-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__175_0>

MÉMOIRE SUR LES POLAIRES INCLINÉES

(voir t. XVIII, p. 322) ;

PAR M. DEWULF.

XIV. Reprenons les équations du § X qui nous donnent les n^2 points fixes du faisceau φ^n des polaires inclinées d'un point $\alpha\beta$ par rapport à un faisceau F^n, et dans ces équations remplaçons β par $A\alpha + B$, nous aurons

$$(A\alpha + B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

$$(A\alpha + B - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = 0.$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\alpha\left[A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right]$$
$$+ (B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

$$\alpha\left[A\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + \frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right]$$
$$+ (B - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) - x\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = 0.$$

En éliminant α entre ces deux équations, nous aurons le lieu décrit par les n^2 points fixes du φ^n quand le point $(\alpha\beta)$ décrit la droite

$$y = Ax + B.$$

Cette élimination nous conduit à l'équation (5). Donc

Quand un point P *décrit une droite* L, *les* n^2 *points fixes du faisceau* φ^n *de ses polaires inclinées par rapport à un faisceau* F^n *décrivent le même lieu que les* $n(n-1)$ *points polaires de* L *par rapport à l'une des courbes du faisceau* F^n *quand cette courbe tourne autour des* n^2 *points fixes du faisceau.*

Remarque. Ces théorèmes renferment comme cas particuliers les beaux théorèmes que Bobillier a démontrés sur les polaires ordinaires au tome XVIII des *Annales* de Gergonne, p. 89 à 98; 1827.

XV. Je reprends l'équation générale de la polaire inclinée d'un point $(\alpha\beta)$ par rapport à une courbe C^n représentée par l'équation

$$(1)\qquad F(x,y)=0.$$

Soit

$$(2)\qquad (\beta-y)\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)+(\alpha-x)\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)=0$$

cette équation

Supposons que le point (α,β) décrive la courbe

$$(3)\qquad f(x,y)=0.$$

Nous aurons la relation

$$(4)\qquad f(\alpha,\beta)=0.$$

Cherchons l'enveloppe des premières polaires inclinées du point (α,β) par rapport à C_n quand ce point décrit la courbe (3).

Pour cela, différentions les équations (1) et (4) par rapport à α et à β, nous trouverons ainsi

$$\frac{df}{d\alpha}+\frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0,$$

et

$$\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

d'où, par l'élimination de α et β,

$$(5)\qquad \frac{df}{d\alpha}\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) = \frac{df}{d\beta}\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right).$$

Éliminant maintenant α et β entre les équations (1), (4) et (5), nous aurons l'équation de l'enveloppe cherchée.

Soient x' et y' un point de la courbe (3), la tangente à cette courbe en ce point a pour équation

$$(x - x')\frac{df}{dx'} + (y - y')\frac{df}{dy'} = 0.$$

Cherchons le lieu décrit par les $n(n-1)$ points polaires inclinés de cette droite par rapport à la courbe C^n, quand le point $x'y'$ décrit la courbe (3).

Reprenons pour cela les équations (3) et (4) du paragraphe XI:

$$A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy} = 0,$$

$$(B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Ces équations donnent les $n(n-1)$ points polaires inclinés d'une droite

$$y = Ax + B.$$

Faisons

$$A = -\frac{\dfrac{df}{dx'}}{\dfrac{df}{dy'}},\quad B = y' + x'\frac{\dfrac{df}{dx'}}{\dfrac{df}{dy'}}.$$

Il viendra

$$(6)\qquad \frac{dF}{dx'}\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)=\frac{df}{dy'}\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right),$$

$$(7)\qquad (y'-y)\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)+(x'-x)\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)=0.$$

Il suffit, pour avoir le lieu cherché, d'éliminer $x'y'$ entre les équations (6), (7) et l'équation (8)

$$(8)\qquad f(x',y')=0.$$

Or ces équations ne diffèrent pas des équations (5), (1), (4).

De là ce théorème :

L'enveloppe des premières polaires inclinées des points d'une courbe par rapport à une certaine directrice est la même que le lieu des points polaires inclinés des tangentes à cette courbe par rapport à la même directrice.

Ce théorème donne comme cas particulier le célèbre théorème de Poncelet, polaires réciproques.

XVI. Supposons que la courbe C^n ait un point multiple de l'ordre p. Les coordonnées (x, y) de ce point satisfont aux $\frac{p(p+1)}{2}$ équations

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{llll} & & F(x,y)=0, & \\ \frac{dF}{dx}=0, & \frac{dF}{dy}=0, & & \\ \frac{d^2F}{dx^2}=0, & \frac{d^2F}{dx\,dy}=0, & \frac{d^2F}{dy^2}=0, & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d^{p-1}F}{dx^{p-1}}=0, & \frac{d^{p-1}F}{dx^{p-2}\,dy}=0, & \frac{d^{p-1}F}{dx^{p-3}\,dy^2}=0,\ldots, & \frac{d^{p-1}F}{dy^{p-1}}=0, \end{array}\right.$$

et les p valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont données par l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^pF}{dx^p}+p\frac{d^pF}{dx^{p-1}dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^pF}{dx^{p-2}dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\ldots \\ &\ldots+\frac{d^pF}{dy^p}\left(\frac{dy}{dx}\right)^p=0.\end{aligned}\right.$$

La première polaire inclinée de l'origine par rapport à C^n est identiquement satisfaite par les coordonnées x et y :

$$\psi(x,y)=\frac{dF}{dx}(x+ky)+\frac{dF}{dy}(y-kx)=0.$$

Il est facile de voir que les dérivées successives de ψ jusqu'à celle de l'ordre $(p-1)$ sont nulles pour les coordonnées x et y du point multiple. Par conséquent: *Tout point multiple de l'ordre* p *de* C^n *est multiple de l'ordre* p — 1 *sur une première polaire inclinée quelconque d'un point quelconque du plan de* C^n.

Les coefficients angulaires des $p-1$ tangentes sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{d^pF}{dx^p}(x+ky)+\frac{d^pF}{dy\,dx^{p-1}}(y-kx) \\ &+(p-1)\left[\frac{d^pF}{dy\,dx^{p-1}}(x+ky)+\frac{d^pF}{dy^2\,dx^{p-2}}(y-kx)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &+\frac{(p-1)(p-2)}{1\ 2}\left[\frac{d^pF}{dy^2\,dx^{p-2}}(x+ky)+\frac{d^pF}{dy^3\,dx^{p-3}}(y-kx)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\left[\frac{d^pF}{dy^{p-1}\,dx}(x+ky)+\frac{d^pF}{dy^p}(y-kx)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2}=0.\end{aligned}$$

La deuxième polaire inclinée d'un point par rapport à une courbe, jouissant, par rapport à la première, des propriétés dont celle-ci jouit par rapport à la courbe, il est clair que

Tout point multiple de l'ordre p *de* C^n *est multiple de l'ordre* p — 2 *sur* C_2^n, *la seconde polaire inclinée.*

De même :

Tout point multiple de l'ordre p *de* C^n *est multiple de l'ordre* p — k *sur la polaire inclinée* C_k^n *de l'ordre* k. En d'autres termes, les premières polaires inclinées seules passent par les points doubles de C^n et elles n'y passent qu'une fois.

Les premières et les secondes polaires inclinées passent seules par les points triples ; les premières y passent deux fois, les secondes une fois.

Et ainsi de suite.

XVII. Nous avons vu au § X que les premières polaires inclinées d'un point par rapport à un faisceau F^n forment un faisceau homographique φ_1^n.

Il est évident que les deuxièmes polaires d'un point quelconque forment aussi un faisceau homographique aux deux précédents, et que les polaires inclinées d'ordre k forment un faisceau homographique φ_k^n. Nous pouvons dire plus généralement que le faisceau φ_p^n des polaires inclinées d'ordre p dont le coefficient est k, d'un certain point, correspond anharmoniquement au faisceau φ_q^n des polaires inclinées, d'ordre q, dont le coefficient est k_1 d'un autre point quelconque.