NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G.-F. BAEHR

Solution de la question 432 (Painvin)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 170-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__170_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 432 (PAINVIN)

(voir t. XVII, p. 185),

PAR M. G.-F. BAEHR,
Professeur à Groningue.

Soit

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \delta,$$
$$a_n - a_1 = (n-1)\,\delta,$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = s_n,$$

(*) M. Somof a fait un travail très-instructif sur les très-petites oscilla tions d'un système de points materiels (*Mémoires de l'Académie de Sain Petersbourg*, t. I, n° 14; 1859). Il y démontre, contre Lagrange et La place, l'existence de racines égales, dans l'équation fondamentale de cet théorie, existence seulement enoncée par Cauchy. TM.

et considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & a_{n-1} & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & . & a_n & a_1 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & . & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & a_2 & . & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On aura, en écrivant les colonnes dans un ordre inverse,

$$D = \pm \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_n & a_{n-1} & . & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_n & . & a_5 & a_4 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & . & a_1 & a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & . & a_2 & a_1 & a_n \end{vmatrix}$$

$+$ si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$,
$-$ si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$,

parce que dans le premier cas on a échangé un nombre pair $(2p)$ de fois deux colonnes entre elles, tandis que dans le deuxième cas cela a eu lieu un nombre impair $(2p+1)$ de fois, la colonne du milieu, si n est impair, restant à sa place.

Si dans ce dernier déterminant on ôte les éléments de la deuxième colonne de ceux de la première, les éléments de la troisième de ceux de la deuxième, et ainsi de suite, il viendra (*)

$$D = \pm \begin{vmatrix} \delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta & a_1 \\ -(n-1)\delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta & a_2 \\ \delta & -(n-1)\delta & \delta & . & \delta & \delta & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta & \delta & \delta & . & -(n-1)\delta & \delta & a_{n-1} \\ \delta & \delta & \delta & . & \delta & -(n-1)\delta & a_n \end{vmatrix}$$

(*) Tome XIII, page 73.

puis ajoutant aux éléments de la première ligne la somm des éléments pris en colonnes des lignes suivantes corre pondantes, on a

$$D = \pm \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ -(n-1)\delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \delta & -(n-1)\delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta & \delta & \delta & . & -(n-1)\delta & \delta \\ \delta & \delta & \delta & . & \delta & -(n-1)\delta \end{array} \right.$$

$$= \pm(-1)^{n-1} s_n \left| \begin{array}{cccccc} -(n-1)\delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \delta & -(n-1)\delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta & \delta & \delta & . & -(n-1)\delta & \delta \\ \delta & \delta & \delta & . & \delta & -(n- \end{array} \right.$$

ou bien (*)

$$D = \pm(-1)^{n-1} s_n \delta^{n-1}$$

$$\times \left| \begin{array}{cccccc} -(n-1) & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & . & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & . & -(n-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 & -(n-1) \end{array} \right|$$

ou ajoutant encore une fois aux éléments de la première ligne tous ceux pris en colonnes des lignes suivantes, et ensuite, les éléments de la première ligne à ceux de chacune des lignes suivantes en particulier, on obtient suc-

(*) Il n'y a plus que $n-1$ colonnes.

cessivement

$$D = \pm(-1)^{n-1} s_n \delta^{n-1}$$

$$\times \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & . & -1 & -1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & . & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & . & -(h-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \pm(-1)^{n-1} s_n \delta^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & . & -1 & -1 \\ 0 & -n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & . & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & . & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & -n \end{vmatrix}$$

ce qui se réduit à

$$D = \pm(-1)^{n} s_n \delta^{n-1} \begin{vmatrix} -n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -n & . & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & . & -n & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & -n \end{vmatrix}$$

$$= \pm(-1)^{n} s_n \delta^{n-1} (-n)^{n-2} = \pm \delta^{n-1} n^{n-2} s_n.$$

Faisant

$$a_1 = 1, \quad \delta = 1,$$

on a

$$D = \pm n^{n-2} . \frac{n(n+1)}{2} = \pm \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

C. Q. F. D.

Soit la progression géométrique

$$a, \; ar, \; ar^2, \ldots, \; ar^{n-1},$$

on aura

$$D = \begin{vmatrix} a & ar & ar^2 & . & ar^{n-3} & ar^{n-2} & ar^{n-1} \\ ar & ar^2 & ar^3 & . & ar^{n-2} & ar^{n-1} & a \\ ar^2 & ar^3 & ar^4 & . & ar^{n-1} & a & ar \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ar^{n-2} & ar^{n-1} & a & . & ar^{n-5} & ar^{n-4} & ar^{n-3} \\ ar^{n-1} & a & ar & . & ar^{n-4} & ar^{n-3} & ar^{n-2} \end{vmatrix} = \pm a^n (r^n - 1)^{n-1}$$

$+$ si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$,
$-$ si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$.

Car en intervertissant l'ordre des colonnes, et faisant n fois sortir en dehors du déterminant le facteur a, qui est commun aux éléments de toutes les colonnes, on a

$$D = \pm a^n \begin{vmatrix} r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & . & r^2 & r & 1 \\ 1 & r^{n-1} & r^{n-2} & . & r^3 & r^2 & r \\ r & 1 & r^{n-1} & . & r^4 & r^3 & r^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r^{n-3} & r^{n-4} & r^{n-5} & . & 1 & r^{n-1} & r^{n-2} \\ r^{n-2} & r^{n-3} & r^{n-4} & . & r & 1 & r^{n-1} \end{vmatrix}$$

ou, multipliant les éléments de la première ligne par r et ôtant des produits les éléments correspondants de la deuxième, puis multipliant de même les éléments de la deuxième par r et ôtant des produits les éléments de la troisième, et ainsi de suite,

$$D = \pm \frac{a^n}{r^{n-1}} \begin{vmatrix} (r^n - 1) & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r^n - 1) & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r^n - 1) & . & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & r^{n-2} & 0 \\ r^{n-2} & r^{n-3} & r^{n-4} & . & r & 1 & r^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{a^n}{r^{n-1}} (r^n - 1)^{n-1} r^{n-1} = \pm a^n (r^n - 1)^{n-1}.$$