NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES PUECH

Solutions géométriques des questions 483 et 484

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 160-161

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__160_1>

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DES QUESTIONS 483 ET 484

(voir t. XVIII, p. 356);

PAR M. JULES PUECH,
Élève du lycée de Castres (Tarn).

Même énoncé; même figure que dans la solution trigonométrique.

Le volume du cône décrit par ABD est représenté par

$$\frac{1}{3}\pi AD \times \overline{AB}^2;$$

d'un autre côté

$$V.ABC = V.ABCD - V.ADC,$$

ce qui donne

$$\text{V.ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\text{AD}\left(\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{CD}}^2 + \text{AB}\times\text{DC}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2}\pi\,\text{AD}\times\overline{\text{DC}}^2 + \frac{1}{6}\pi\,\overline{\text{AD}}^2\right);$$

par suite

$$\text{V.ABC} = \pi\text{AD}\left(\frac{1}{3}\overline{\text{AB}}^2 + \frac{1}{3}\overline{\text{CD}}^2 - \frac{1}{2}\overline{\text{CD}}^2 + \frac{1}{3}\text{AB}\times\text{DC} - \frac{1}{6}\overline{\text{AD}}^2\right),$$

ou

$$\text{V.ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\text{AD}\times\overline{\text{AB}}^2 + \pi\,\text{AD}\left(\frac{1}{3}\text{AB}\times\text{DC} - \frac{1}{6}\overline{\text{CD}}^2 - \frac{1}{6}\overline{\text{AD}}^2\right).$$

Il suffit donc de démontrer que la quantité

$$\frac{1}{3}\text{AB}\times\text{DC} - \frac{1}{6}\overline{\text{CD}}^2 - \frac{1}{6}\overline{\text{AD}}^2$$

placée entre crochets est nulle, ce qui revient à faire voir que

$$\text{CD}\,(2\,\text{AD} - \text{CD}) = \overline{\text{AD}}^2.$$

Cette égalité devient manifeste si l'on mène par le point C, CF perpendiculaire sur AB. Le triangle rectangle FCB donne

$$\overline{\text{AD}}^2 = \overline{\text{CF}}^2 = \overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{BF}}^2 = \overline{\text{BA}}^2 - (\text{BA} - \text{AF})^2$$
$$= \overline{\text{BA}}^2 - (\text{BA} - \text{CD})^2 = 2\,\text{AB}\times\text{DC} - \overline{\text{DC}}^2 = \text{DC}\,(2\,\text{AB} - \text{DC}).$$

Corollaire (question 484). Dans la même figure le segment sphérique CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

Note. MM. de la Brière et de Charodon, élèves de l'école des Carmes, ont résolu la question de la même manière.