

THEOFIK HAZAN

**Solutions trigonométriques des
questions 483 et 484**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 158-160

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__158_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DES QUESTIONS 483 ET 484

(voir t. XVIII, p. 357);

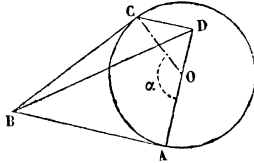
PAR M. THEOFIK HAZAN,

Lieutenant, élève de l'École impériale Ottomane à Constantinople.

Théorème I. D'un point B extérieur à une circonférence O on mène deux tangentes BA et BC , on projette C en D sur le rayon OA , et l'on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OA , l'un des rayons des points de contact; il faut démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BDA (question 483).

Théorème. II. La même figure étant faite que précédemment, et exécutant la même révolution, il faut prouver que le segment sphérique engendré par CBA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD (question 484).

Si nous supposons le rayon OA égal à l'unité, nous



aurons

$$BA = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2},$$

$$CD = \sin \alpha,$$

$$AD = 1 - \cos \alpha.$$

Considérons :

1°. Le volume engendré par le quadrilatère DABC = ν ;

2°. Le volume engendré par CDA = ν' ;

3°. Le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC = V;

4°. Le volume engendré par le triangle ABD = V' .

Nous aurons

$$(I) \quad \nu = \frac{1}{3} \pi (1 - \cos \alpha) \left(\operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \right),$$

$$(II) \quad \nu' = \frac{1}{6} \pi (1 - \cos \alpha) [3 \sin^2 \alpha + (1 - \cos \alpha)^2].$$

En soustrayant ν' de ν on obtient

$$(I) \quad \nu - \nu' = V = \frac{1}{6} \pi (1 - \cos \alpha) \left\{ \begin{array}{l} 2 \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha \\ + 2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \\ - (1 - \cos \alpha)^2 \end{array} \right\},$$

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu - \nu' = V = \frac{1}{3} \pi (1 - \cos \alpha) \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} \\ - \frac{1}{6} \pi (1 - \cos \alpha) \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \alpha - 2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \\ + (1 - \cos \alpha)^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\}.$$

mais comme

$$V' = \frac{1}{3} \pi (1 - \cos \alpha) \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2},$$

et

$$\sin^2 \alpha - 2 \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sin \alpha + (1 - \cos \alpha)^2 = (0),$$

en substituant dans l'équation (III) on obtiendra

$$V = V'.$$

C. Q. F. D.

Théorème II. En soustrayant le segment CDA du quadrilatère ABCD, on obtiendra, d'après le théorème prouvé en haut, le volume du cône ABD; en effet, si du volume du cône ABD on soustrait du quadrilatère ABCD, on obtiendra le volume du triangle engendré par CDB; enfin le segment engendré CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.