

CREMONA

Solution de la question 465

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 151-153

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__151_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 465

(voir t. XVIII, p. 117);

PAR M. CREMONA,
Professeur à Crémone.

Soient a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , n quantités quelconques; α une racine primitive de l'équation binôme

$$x^n - 1 = 0,$$

et

$$\theta_r = a_0 + a_1 \alpha_r + a_2 \alpha_r^2 + \dots + a_{n-1} \alpha_r^{n-1}.$$

en supposant $\alpha_r = \alpha^r$.

Multiplions entre eux les deux déterminants

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 \dots & a_{n-2} \end{vmatrix} \\
 \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

En exécutant la multiplication par lignes, les colonnes du déterminant produit deviennent divisibles respectivement par $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, et l'on a

$$\mathbf{D}\Delta = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} \dots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2}^2 \dots & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \dots & \alpha_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Or le déterminant du second membre est évidemment égal à $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta$; donc

$$\mathbf{D} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n.$$

Ce théorème, mentionné par M. Michael Roberts (*Nouvelles Annales*, cahier de mars 1859, p. 87) est de M. Spottiswoode (*Journal de Crelle*, t. LI); la démon-

tration ci-dessus m'a été communiquée par M. Brioschi, et je l'ai publiée comme lemme dans une petite Note *Intorno ad un teorema di Abel* (*Annali di Tortolini*, 1856).

En supposant

$$a_r = a + rd,$$

il s'ensuit

$$\theta_r = \frac{nd}{\alpha_r - 1} \quad \text{pour } r = 1, 2, \dots, n-1$$

et

$$\theta_n = na + \frac{n(n-1)}{2}d;$$

donc

$$\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1} = (-1)^{n-1} n^{n-2} d^{n-1},$$

et, par conséquent,

$$D = \begin{vmatrix} a & a+d \dots & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d \dots & a \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha+(n-1)d & a \dots & a+(n-2)d \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} (nd)^{n-1} \left[a + \frac{(n-1)d}{2} \right],$$

ce qui est bien la question 465.