

Équation du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 14-17

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__14_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

1. Soit l'équation

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4). \end{array} \right.$$

On a

$$a_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + a_1 = 0 \quad (\text{relation d'Albert Girard})$$

Calculons l'équation qui a pour racines

$$(\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_1 - \alpha_2)^2, [\alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_3 + \alpha_4)]^2, [\alpha_2 + \alpha_3 - (\alpha_1 + \alpha_4)]^2,$$

ou, ce qui revient au même, qui a pour racines

$$\left[\frac{a_1 + 2a_0(\alpha_3 + \alpha_4)}{a_0} \right]^2, \left[\frac{a_1 + 2a_0(\alpha_2 + \alpha_4)}{a_0} \right]^2, \\ \left[\frac{a_1 + 2a_0(\alpha_1 + \alpha_2)}{a_0} \right]^2.$$

On obtient

$$a_0^6 \theta^3 - a_0^4 \theta^2 (3a_1^2 - 8a_2 a_0) \\ + a_0^2 \theta (3a_1^4 - 16a_0 a_1^2 a_2 + 16a_0^2 a_1^2 + 16a_0^2 a_1 a_3 - 64a_0^3 a_1) \\ - (a_1^3 - 4a_0 a_1 a_2 + 8a_0^2 a_1)^2 = 0;$$

c'est la *réduite*.

Soient r_1^2, r_2^2, r_3^2 les trois racines de cette réduite; on trouve facilement

$$4a_0 \alpha_i - a_0 (r_1 + r_2 + r_3) + a_1 = 0,$$

où les r ont le double signe \pm ; donc cette dernière équation équivaut à huit équations. Ainsi, α_i a huit valeurs, dont quatre sont les racines de l'équation donnée et les quatre autres sont les mêmes racines, changées de signes. En effet, l'équation qui a pour racines $-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4$ est

$$(2) \quad a_0 x^4 - a_1 x^3 + a_2 x^2 - a_3 x + a_4 = 0.$$

Cette équation a même réduite que l'équation (1); c'est ce qu'on voit à *priori*, d'après la forme des racines de la réduite, et aussi à *posteriori*, car il n'y a que a_1 et a_3 qui aient changé de signes.

Posons

$$a_0 r_1 = a_1 + 2a_0(\alpha_1 + \alpha_4),$$

$$a_0 r_2 = a_1 + 2a_0(\alpha_2 + \alpha_4),$$

$$a_0 r_3 = a_1 + 2a_0(\alpha_3 + \alpha_4).$$

On a

$$\begin{aligned} 4 a_0 x_1 + a_0 (r_2 + r_3 - r_1) + a_1 &= 0, \\ 4 a_0 x_2 + a_0 (r_1 + r_3 - r_2) + a_1 &= 0, \\ 4 a_0 x_3 + a_0 (r_1 + r_2 - r_3) + a_1 &= 0, \\ 4 a_0 x_4 + a_0 (r_1 + r_2 - r_3) + a_1 &= 0; \end{aligned}$$

changeant les signes de r , on a les quatre autres racines. Il s'agit maintenant de savoir lequel des deux systèmes de racines s'applique à l'équation (1).

Dans les deux systèmes, la somme des racines α mène à la relation d'Albert Girard, et les r disparaissant, on n'a aucune indication sur les signes des r ; la somme des α pris deux à deux, ou quatre à quatre, donne évidemment le même résultat dans les deux systèmes; il reste à prendre les α trois à trois.

$$\begin{aligned} 16 a_0^2 x_1 x_2 &= a_0^2 [r_3^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2 r_1 r_2] + 2 a_1 a_0 r_3 + a_1^2, \\ 4 a_0 (\alpha_3 + x_1) &= 2 (a_0 r_3 - a_1), \\ [x_1 x_2 (\alpha_3 + x_1) + \alpha_3 x_1 (\alpha_1 + \alpha_2)] \\ &= 16 a_0^3 [2 a_0^3 + r_1 r_2 r_3 + a_0^2 a_1 (r_3^2 + r_1^2 + r_2^2) - a_1^3], \\ a_3 a_0^2 (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) &= 3 a_1^3 - 8 a_1 a_2; \end{aligned}$$

ainsi,

$$8 a_0^3 [x_1 x_2 (\alpha_3 + x_1) + \alpha_3 x_1 (\alpha_1 + \alpha_2)] = a_0^3 r_1 r_2 r_3 + a_1 [a_1^2 - 4 a_2].$$

On a donc

$$\begin{aligned} x_1 x_2 \alpha_3 + \alpha_1 x_2 x_1 + x_1 x_3 \alpha_1 + x_2 \alpha_3 \alpha_4 \\ - \frac{a_1}{a_0} = \frac{a_0^3 r_1 r_2 r_3 + a_1^3 - 4 a_0 a_1 a_2}{8 a_0^3}; \end{aligned}$$

d'où

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{a_1 (4 a_0 a_2 - a_1^2) - 8 a_0^2 a_3}{a_0^3}.$$

Il faut donner aux r des signes tels, qu'ils satisfassent

à cette équation; et cette condition suffit pour faire cesser l'indétermination.

Si $a_1 = 0$ (a_0 étant positif), il suffit que r_1, r_2, r_3 donne un signe opposé à a_3 ; règle connue.

Exemple :

$$x^4 + 24x^2 + 48x + 52 = 0;$$

réduite

$$\theta^3 + 12\theta^2 + 23\theta - 36 = 0.$$

On a

$$r_1^2 = 1, \quad r_2^2 = -4, \quad r_3^2 = -9;$$

d'où

$$r_1 = \pm 1, \quad r_2 = \pm 2i, \quad r_3 = -3i;$$

il faut prendre les signes de manière que $r_1 r_2 r_3$ ait le signe *moins*. Donc

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2i, \quad r_3 = -3i,$$

et

$$4x_1 = i - 1,$$

$$4x_2 = 1 + 5i,$$

$$4x_3 = 1 - 5i,$$

$$4x_4 = -1 - i.$$

Cet exemple est pris dans les *Comptes rendus* (juillet 1858, p. 31); ce qu'on lit là-dessus p. 32, paraît superflu. Une telle observation m'a été aussi communiquée par M. Macario, élève des Ponts et Chaussées de Naples.