

PAINVIN

## **Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19 (1860), p. 144-149

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_144\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__144_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES  
DU SECOND ORDRE**

(voir tome XVIII, page 407 (\*));

PAR M. PAINVIN,  
Docteur ès Sciences.

---

**CHAPITRE IV.**

PROPRIÉTÉS DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

§ I<sup>er</sup>. — *Centre. — Plans conjugués. — Polaires réciproques. — Génératrices rectilignes.*

1<sup>o</sup>. *Centre.*

82. Représentons par  $\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}$  les coordonnées du centre de la surface ayant pour équation

$$(1) \quad \varphi = \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 \\ + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 \\ + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4 \end{array} \right\} = 0;$$

on sait que les coordonnées du centre vérifient les équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx_1} = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx_2} = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx_3} = a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 = 0. \end{array} \right.$$

---

(\*) La fin du chapitre III incessamment.

Or le discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

donne identiquement

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{12} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{13} \frac{d\Delta}{da_{43}} + a_{14} \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \\ a_{21} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{22} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{23} \frac{d\Delta}{da_{43}} + a_{24} \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \\ a_{31} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{32} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{33} \frac{d\Delta}{da_{43}} + a_{34} \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0. \end{cases}$$

La comparaison des systèmes d'équations (2) et (3) nous fournit immédiatement les coordonnées du centre

$$(4) \quad \left( X_1 = \frac{d\Delta}{da_{41}}, \quad X_2 = \frac{d\Delta}{da_{42}}, \quad X_3 = \frac{d\Delta}{da_{43}}, \quad X_4 = \frac{d\Delta}{da_{44}} \right).$$

La surface, rapportée à son centre, aura alors pour équation

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 \\ + \frac{\Delta}{da_{44}} x_4^2 = 0. \end{cases}$$

83. Si l'on regarde le premier membre de l'équation (1) comme une fonction des variables  $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$  et qu'on y remplace ces variables par  $\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}$ , la fonction acquerra, en général, une valeur maximum ou minimum.

Or on a, d'après le principe des fonctions homogènes,

$$2\varphi = x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + x_4 \frac{d\varphi}{dx_4}.$$

En désignant par  $\Phi$  la valeur de  $\varphi$  lorsqu'on y fait

$$x_r = X_r,$$

où

$$r = 1, 2, 3, 4,$$

il viendra, eu égard aux relations (2),

$$2\Phi = X_4 \frac{d\Phi}{dX_4}.$$

D'un autre côté,

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dX_4} = a_{41} X_1 + a_{42} X_2 + a_{43} X_3 + a_{44} X_4;$$

ou, d'après les valeurs (4),

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dX_4} = a_{41} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{42} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{43} \frac{d\Delta}{da_{43}} + a_{44} \frac{d\Delta}{da_{44}} = \Delta.$$

Par suite, la fonction que nous considérons, c'est-à-dire  $\frac{1}{x_4^2} \varphi$ , aura pour valeur, dans ce cas,

$$(6) \quad \frac{1}{X_4^2} \Phi = \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}}.$$

En appliquant les règles ordinaires du calcul des valeurs maxima et minima, on constate facilement que la fonction  $\frac{1}{x_4^2} \varphi$  n'obtient de telles valeurs que lorsque cette fonction, égalée à zéro, représente une surface appartenant

nant au genre ellipsoïde; et alors

il y a *maximum*, si  $\frac{d\Delta}{da_{41}} < 0$ ,

il y a *minimum*, si  $\frac{d\Delta}{da_{41}} > 0$ .

84. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé implicitement  $\frac{d\Delta}{da_{41}}$  différent de zéro; sans quoi les équations (2) n'admettraient plus une solution finie et déterminée.

Si le centre est sur la surface, on a, d'après l'équation (6),  $\Delta = 0$ , et réciproquement; la surface alors est un cône.

Lorsque  $\frac{d\Delta}{da_{41}}$  est nul, il faudra distinguer les deux cas suivants :

1°.  $\Delta$  est différent de zéro; les relations d'identité du chapitre I<sup>er</sup> nous montrent qu'une au moins des quantités  $\frac{d\Delta}{da_{41}}$ ,  $\frac{d\Delta}{da_{42}}$ ,  $\frac{d\Delta}{da_{43}}$  est différente de zéro : le centre est à l'infini.

2°.  $\Delta$  est nul; alors les quantités  $\frac{d\Delta}{da_{41}}$ ,  $\frac{d\Delta}{da_{42}}$ ,  $\frac{d\Delta}{da_{43}}$  sont aussi nulles, et il peut y avoir indétermination ou impossibilité.

Je n'insisterai pas davantage sur cette discussion.

### 3°. Plans conjugués.

85. Si l'on représente par  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les demi-dérivées par rapport à  $x_1, x_2, x_3, x_4$  du premier membre de l'équation (1) dans lesquelles on a remplacé  $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$

par  $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ , le plan ayant pour équation

$$(7) \quad r_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 = 0$$

est dit le *plan polaire* du point  $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)$  par rapport à la surface  $\varphi = 0$ ; le point  $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}\right)$  est appelé le *pôle* de ce plan.

Trois plans sont dits *conjugués* lorsque le pôle d'un quelconque de ces trois plans se trouve sur l'intersection des deux autres.

Soient les équations de trois plans

$$(8) \quad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0. \end{cases}$$

Si  $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$  sont les coordonnées du pôle du premier de ces plans, on devra avoir

$$\begin{aligned} a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + a_{13} \alpha_3 + a_{14} \alpha_4 &= m_1, \\ a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 + a_{23} \alpha_3 + a_{24} \alpha_4 &= m_2, \\ a_{31} \alpha_1 + a_{32} \alpha_2 + a_{33} \alpha_3 + a_{34} \alpha_4 &= m_3, \\ a_{41} \alpha_1 + a_{42} \alpha_2 + a_{43} \alpha_3 + a_{44} \alpha_4 &= m_4; \end{aligned}$$

et les valeurs de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , déduites de ces quatre équations devront vérifier les deux dernières équations (8). On obtiendra ainsi deux équations de condition. On opérera de la même manière pour le second et le troisième plan. On trouvera, en définitive, trois équations de condition seulement.

Les *trois* conditions pour que les trois plans (8) soient

conjugués sont données par les relations suivantes :

$$\begin{array}{l}
 (9) \left\{ \begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_1 & a_1 & a_{11} & m_1 \\
 a_{21} & a_{22} & a_2 & a_4 & m_2 \\
 a_{31} & a_2 & a_{33} & a_{11} & m_3 \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\
 n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0
 \end{array} \right| = 0, \\
 \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\
 p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0
 \end{array} \right| = 0, \\
 \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & p_2 \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & p_3 \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & p_4 \\
 m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0
 \end{array} \right| = 0.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

( La suite prochainement. )