

L. BRAULT
LAQUIÈRE
E. RAGONNEAU
MARQUET
DALICAN

Solution de la question 436

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 141-144

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__141_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 436

(voir t. XVII, p. 186),

PAR MM. L. BRAULT, LAQUIÈRE, E. RAGONNEAU,
MARQUET ET DALICAN.

Quelle est l'enveloppe de la droite dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est donnée?

(*) Je ne sache pas que ces belles relations *de contact* entre les lignes géodésiques et de courbure aient déjà été signalées. Tm.

Soient A, B les deux points donnés. Prenons AB pour axes des x , et pour axe des y une perpendiculaire élevée sur le milieu de AB . Appelons $2c$ la distance AB .

L'équation de l'enveloppé s'obtiendra en éliminant a et b entre les trois équations suivantes :

$$(1) \quad y = ax + b,$$

$$(2) \quad 2(a^2c^2 + b^2) - k^2(a^2 + 1) = 0,$$

$$(3) \quad \frac{x}{a(2c^2 - k^2)} = \frac{y}{2b}.$$

La première équation est l'équation d'une droite quelconque; la deuxième exprime que la somme des carrés des distances des points A et B à cette droite est égale à k^2 ; enfin, l'équation (3) n'est autre que

$$\frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{f'b}{\varphi'b},$$

quand on suppose les équations (1) et (2) ramenées à la forme

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(a, b) = 0.$$

L'élimination est assez simple et donne pour résultat

$$(4) \quad 2(2c^2 - k^2)y^2 - 2k^2x^2 = k^2(2c^2 - k^2).$$

Discussion.

$$1^\circ. \quad (2c^2 - k^2) < 0.$$

Dans ce cas l'équation (4) représente une ellipse. Les demi-axes sont

$$(5) \quad \begin{cases} a = \frac{k}{\sqrt{2}}, \\ b = \sqrt{\frac{k^2 - 2c^2}{2}}. \end{cases}$$

Les foyers se trouvent sur l'axe des y , leur distance à l'origine est égale à la distance des points A et B à cette même origine.

$$2^{\circ}. \quad (2c^2 - k^2) = 0.$$

L'équation (3) nous donne $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des y , ou plutôt une portion de l'axe des y . L'analyse devait conduire à ce résultat. Supposons en effet $2c^2 - k^2$ différent de zéro : $2c^2 - k^2 = \varepsilon$. Nous rentrons dans le cas précédent. Le lieu est une ellipse dont le demi grand axe est $\frac{k}{\sqrt{2}}$, et dont l'autre (5) tend vers zéro avec ε . A la limite ($\varepsilon = 0$) l'ellipse se réduit à son grand axe; nous avons là une sorte d'*ellipse évanouissante*.

Or à toute ellipse on peut mener deux tangentes parallèles à une direction donnée. Considérons donc une certaine direction et une ellipse, correspondant à une certaine valeur de ε . Nous trouverons toujours deux tangentes à cette ellipse, parallèles à la direction considérée. Chacune de ces tangentes sera d'autant moins éloignée du sommet le plus voisin du grand axe, que ε sera plus petit. Ces distances convergent vers zéro avec ε . Nous sommes donc, par ces considérations, amenés à ceci : que toute droite passant par les points

$$\begin{aligned} x &= 0, & x &= 0, \\ y &= \frac{k}{\sqrt{2}} = c, & y &= -\frac{k}{\sqrt{2}} = -c, \end{aligned}$$

est telle, que la somme des carrés des distances des points A, B à cette droite est égale à $2c^2$. C'est ce qu'on peut vérifier directement.

$$3^{\circ}. \quad (2c^2 - k^2) > 0.$$

(144)

L'équation (4) représente une hyperbole rapportée à ses axes. L'axe imaginaire est dirigé suivant l'axe des x . La distance des foyers à l'origine est égale à c .
