

CH. BOURGEOIS

Note sur la question proposée comme sujet de composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1857

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19 (1860), p. 130-134

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__130_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur la question proposée comme sujet de composition mathématique
pour l'admission à l'École Polytechnique en 1857 ;

PAR M. CH. BOURGEOIS.

La question dont il s'agit était énoncée dans les termes suivants :

Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = A \sin x + B$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A et B, et effectuer la séparation de ces racines.

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

Deux solutions de cette question ont été données dans le tome XVI de ces *Annales* (p. 376 et 430). La première solution laisse beaucoup à désirer au point de vue théorique, et l'auteur ne traite l'application numérique qu'après avoir fait subir aux coefficients donnés une profonde altération. La deuxième solution a l'inconvénient de ne pas rattacher la question d'une manière suffisante aux principes fondamentaux de l'algèbre. Il ne s'agissait pas effectivement, pour les candidats, de résoudre un problème, mais seulement d'appliquer les théorèmes connus relatifs à la variation des fonctions.

On obtient une solution fort simple de la question en suivant la marche tracée par M. J.-A. Serret dans un article qui fait partie du t. V des *Annales de l'Observatoire impérial*, et qui est intitulé : *Note sur l'équation*

dont dépend l'anomalie excentrique et sur les séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des corps célestes. J'exposerai ici cette solution en peu de mots, afin de présenter aux candidats le type de la réponse qui leur était demandée.

Solution. Remarquons d'abord que l'on peut toujours supposer A positif; en effet, si le contraire a lieu, et que l'on fasse

$$A = -A', \quad B = \pi - B', \quad x = \pi - x',$$

l'équation à résoudre deviendra

$$x' = A' \sin x' + B'.$$

Cette équation transformée est de même forme que la proposée, et le coefficient A' est positif.

Cela posé, nous ferons

$$(1) \quad y = x - A \sin x - B,$$

et en désignant par y' la dérivée de y , on aura

$$(2) \quad y' = 1 - A \cos x.$$

Nous distinguerons les trois cas $A < 1$, $A = 1$, $A > 1$.

1°. Si l'on a $A < 1$, la dérivée y' est constamment positive, donc y est une fonction croissante; par suite l'équation proposée

$$y = 0$$

ne peut avoir qu'une seule racine réelle. D'ailleurs cette racine existe effectivement, puisque l'on a

$$y = -\infty \quad \text{pour} \quad x = -\infty,$$

$$y = +\infty \quad \text{pour} \quad x = +\infty.$$

2°. Si l'on a $A = 1$, la conclusion précédente subsiste,

l'équation (2) donne

$$y' = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x;$$

la dérivée y' peut s'annuler, mais elle n'est jamais négative, en sorte que la fonction y est croissante, comme dans le cas de $A < 1$.

3°. Si l'on a $A > 1$, on peut faire $A = \frac{1}{\cos \alpha}$, α désignant un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; les équations (1) et (2) deviennent alors

$$(1 \text{ bis}) \quad y = x - \frac{\sin x}{\cos \alpha} - B,$$

$$(2 \text{ bis}) \quad y' = 1 + \frac{\cos x}{\cos \alpha}.$$

Soit K un entier arbitraire positif, nul ou négatif, et faisons croître x depuis $2K\pi - \alpha$ jusqu'à $2(K+1)\pi - \alpha$. Dans l'intervalle de $x = 2K\pi - \alpha$ à $x = 2K\pi + \alpha$, la fonction y est décroissante, car la dérivée y' est alors nulle ou négative; au contraire, dans l'intervalle de $x = 2K\pi + \alpha$ à $x = 2(K+1)\pi - \alpha$, la fonction y est croissante, car la dérivée y' est nulle ou positive. L'équation proposée ne peut donc avoir qu'une seule racine entre $2K\pi - \alpha$ et $2K\pi + \alpha$, et une seule entre $2K\pi + \alpha$ et $2(K+1)\pi - \alpha$. Il est facile de reconnaître si ces racines existent effectivement.

Posons

$$(3) \quad \frac{B + \alpha - \text{tang } \alpha}{2\pi} = n - f;$$

$$(4) \quad \frac{B - \alpha + \text{tang } \alpha}{2\pi} = n' - f',$$

n et n' étant des entiers positifs nuls, ou négatifs, f et f'

des fractions inférieures à l'unité et positives ou nulles, on aura

$$\begin{aligned} y &= 2\pi(K - n + f) && \text{pour } x = 2K\pi - \alpha, \\ y &= 2\pi(K - n' + f') && \text{pour } x = 2K\pi + \alpha, \\ y &= 2\pi(K + 1 - n + f') && \text{pour } x = 2(K + 1)\pi - \alpha; \end{aligned}$$

donc pour que l'équation (1) ait une racine entre $2K\pi - \alpha$ et $2K\pi + \alpha$, il faut et il suffit que K soit l'un des nombres $n, n + 1, n + 2, \dots, n' - 1$. On ne peut jamais avoir $n' < n$; mais si $n' = n$, il n'existe pas de racines entre $2K\pi - \alpha$ et $2K\pi + \alpha$. Pareillement, pour qu'il y ait une racine entre $2K\pi + \alpha$ et $2(K + 1)\pi - \alpha$, il faut et il suffit que K soit l'un des nombres $n - 1, n, n + 1, \dots, n' - 1$. Il résulte de là que l'équation proposée a

$$2(n' - n) + 1$$

racines réelles dont la séparation est évidemment effectuée par ce qui précède. Cette conclusion subsiste si l'une des fractions f ou f' est nulle; seulement dans ce cas l'équation proposée a deux racines égales.

On peut abrégér le calcul des nombres n et n' lorsque A est un grand nombre; car l'on a

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{6}\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \dots,$$

et comme $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{A}$, on aura

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{6A^3} + \dots\right);$$

en outre,

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{A^2 - 1} = A + (\sqrt{A^2 - 1} - A) = A - \frac{1}{A + \sqrt{A^2 - 1}};$$

on peut donc écrire

$$n - f' = \frac{B - A}{2\pi} + 0,25 - \left(\frac{1}{2\pi A} + \frac{1}{12\pi A^3} + \dots \right) \\ + \frac{1}{2\pi(A + \sqrt{A^2 - 1})},$$

$$n' - f' = \frac{B + A}{2\pi} - 0,25 + \left(\frac{1}{2\pi A} + \frac{1}{12\pi A^3} - \dots \right) \\ - \frac{1}{2\pi(A + \sqrt{A^2 - 1})}.$$

A étant un grand nombre, les deux dernières parties de ces formules n'influenceront pas sur les valeurs des parties entières n et n' ; on aura donc avec une exactitude généralement suffisante

$$(5) \quad n - f = \frac{B - A}{2\pi} + 0,25,$$

$$(6) \quad n' - f' = \frac{B + A}{2\pi} - 0,25.$$

Application. Dans l'exemple proposé on a

$$A = 3142, \quad B = 157.$$

Les formules (5) et (6) donnent

$$n - f = -474,82;$$

$$n' - f' = +523,80.$$

Avec les formules (3) et (4) on aurait eu

$$n - f = -474,82;$$

$$n' - f' = +524,81;$$

donc $n = -474$, $n' = 525$, $n' - n = 999$; le nombre des racines de l'équation proposée est donc

$$2(n' - n) + 1 = 1999.$$