ÉMILE FRANÇOISE

Solution des questions 483, 484, 485

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 11-14

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__11_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 483, 484, 485

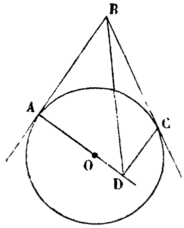
(voir t XVIII, p 357);

PAR M. ÉMILE FRANÇOISE,
Élève du lycée de Caen.

Solution de la question 483.

D'un point B extérieur à une circonférence O on mène

FIG. 1.



deux tangentes BA et BC, on projette C en D sur le rayon OA, et l'on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OA, l'un des rayons des points de contact; il faut démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BOA.

On a, en effet,

$$\text{vol. ABD} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^2 .\, AD,$$

$$\text{vol ABCD} = \frac{1}{3}\pi\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + AB.CD\right) AB,$$

$$\text{vol ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\,(3r - AD).$$

Soit $\widehat{ABC} = \alpha$; on a

$$AD = AB \sin\alpha,$$
$$CD = r \sin\alpha,$$

r étant le rayon du cercle.

Les expressions précédentes deviennent

$$\text{vol. ABD} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin\alpha,$$

$$\text{vol. ABCD} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin\alpha + \frac{1}{3}\pi r^2 AB \sin^3\alpha + \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^2 r \sin\alpha,$$

$$\text{vol. ACD} = \pi\,\overline{BA}^2 r \sin\alpha - \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin^3\alpha,$$

$$\text{vol. ABCD} - \text{vol. ABD}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\, AB \sin\alpha \left[\overline{AB}^2 \sin^2\alpha + (AB - r\sin\alpha)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\, AB \sin\alpha \left[\overline{AD}^2 + (AB - CD)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin^3\alpha = \text{vol ABD}.$$

C. Q. F. D.

Solution de la question 484.

La même figure étant faite que précédemment, et exécutant la même révolution, il faut prouver que le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

En effet,

$$\text{vol. CBD} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. ABD},$$
$$\text{vol. CAD} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. ABC},$$

et comme

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ABD},$$

on a

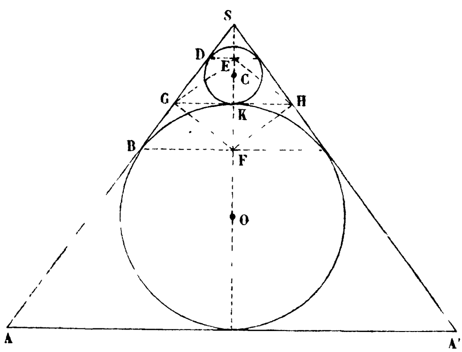
$$\text{vol. CBD} = \text{vol. CAD}.$$

C. Q. F. D.

Solution de la question 485.

Le volume compris entre un cône droit ASA′ et deux

Fig. 2.



sphères O et C qui le touchent intérieurement et se touchent elles-mêmes extérieurement, est la moitié du volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les deux cercles de contact.

Le volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les points de contact a pour mesure

$$\frac{1}{6}\pi\,\overline{BD}^2\,.\,EF.$$

Je mène GH tangente commune aux deux circonférences.

Je joins GF et GE; on a

$$GK = GD = GB,$$

et, par conséquent,

$$KC = KF.$$

D'ailleurs (*Question* 483),

$$\text{vol. } BGK = \text{vol. } GKF,$$

$$\text{vol. } GEK = \text{vol. } GKD;$$

donc

$$\text{vol. } BKD = \frac{1}{3}\pi\,\overline{GK}^2\,EF = \frac{1}{12}\pi\,\overline{BD}^2\,EF.$$

C'est la moitié du volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les cercles de contact.