

G. DUCORROY

**Cercles osculateurs et surfaces osculatrices
dans les lignes et surfaces du deuxième ordre**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 118-121

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__118_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERCLES OSCULATEURS ET SURFACES OSCULATRICES

dans les lignes et surfaces du deuxième ordre ;

PAR M. G. DUCOROY,

Officier du génie.

1. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une ellipse (coordonnée rectangulaire) ; l'équation générale de toutes les courbes du deuxième degré osculatrices à cette ellipse, au point x', y' , sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - 1 \right) [y - y' - m(x - x')] = 0.$$

Cherchant les conditions pour que cette équation représente un cercle, on trouve pour la valeur de m

$$m = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

ce qui donne la construction connue du cercle osculateur (*).

2. Soit maintenant

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

un ellipsoïde. Soit b l'axe moyen.

Deux surfaces du deuxième degré qui sont osculatrices en un point doivent avoir une intersection plane passant par ce point ; en effet, le plan qui passe par deux points quelconques de la courbe d'intersection et par le point de contact, coupent les deux surfaces suivant deux coniques qui ont cinq points communs et qui par conséquent se confondent. Toutes les surfaces du deuxième degré osculatrices à l'ellipsoïde (1) sont donc comprises dans l'équation

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + \lambda \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 \right) \\ \times [z - z' + m(y - y') + n(x - x')] = 0. \end{array} \right.$$

Leur intersection avec l'équation (1) se trouve tout entière dans le plan

$$(3) \quad z - z' + m(y - y') + n(x - x') = 0.$$

Pour que l'équation (2) soit une sphère, il faut que cette

(*) L'équation de ce cercle, après avoir déterminé λ , est

$$(a^2 y'^2 + b^2 x'^2)(x^2 + y^2) = a^2 b^2 (x'^2 + y'^2). \quad \text{J. M.}$$

intersection soit circulaire, il faut par conséquent que le plan (3) soit parallèle à l'axe moyen; donc $m = 0$.

On trouve alors

$$\begin{aligned} x' &= \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \\ z' &= \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \\ n &= \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} \quad (*). \end{aligned}$$

Remarquons que ces deux valeurs de n sont précisément celles qui donnent les deux sections circulaires.

Cela posé, on trouve aisément le rayon de la sphère, qui est précisément le même que celui des cercles osculateurs à la section principale (x, z) au point (x', z') .

On obtient ainsi

$$\rho = \frac{b^3}{ac}.$$

Les quatre ombilics d'un ellipsoïde se réduisent à deux, si $a = b$.

3. Des deux valeurs de x' et z' on tire

$$\frac{x'^2}{a^2 - b^2} - \frac{z'^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

C'est le lieu des ombilics de tous les ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde donné; ce lieu est une hyperbole homofocale aux sections de ces surfaces par le plan des xz .

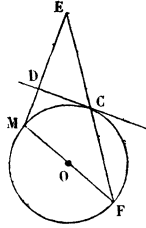
On fera exactement les mêmes recherches pour les autres surfaces du deuxième ordre.

4. La méthode donnée plus haut pour trouver le cercle osculateur de l'ellipse ne s'applique qu'aux courbes

(*) Ainsi la sphère osculatrice n'existe que pour quatre points, savoir les ombilics. T*

du deuxième degré; mais il existe une propriété du cercle qui permet d'écrire immédiatement l'équation du cercle osculateur en un point d'une courbe quelconque sachant

que son rayon $\rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$.



Soit un cercle O, DC une tangente fixe, M un point quelconque de la courbe, MD la perpendiculaire sur cette tangente, on a

$$\frac{\overline{MC}^2}{\overline{MD}} = \overline{ME} = \overline{MF} = 2R.$$

Si le cercle O est osculateur en C à une courbe quelconque au point x', y' , on aura donc pour son équation

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \frac{y - y' - \rho(x - x')}{\sqrt{1 + p^2}} \times \frac{2(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

ou

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 2 \frac{y - y' - p(x - x')}{q} (1 + p^2),$$

qu'on peut mettre, si l'on veut, sous la forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} (x - x')^2 + (y - y')^2 & x - x' & y - y' \\ 0 & dx' & dy' \\ 2(dx'^2 + dy'^2) & dx' & d^2y' \end{vmatrix} = 0.$$