

BELLAVITIS

MANNHEIM

ANGELO GENOCCHI

**Troisième solution de la question 273**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 115-117

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_115\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__115_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

### TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 275

(voir t. XIII, p. 38) ;

PAR MM. BELLAVITIS, MANNHEIM

ET ANGELO GENOCCHI.

---

Le triangle  $ABC$  a un sommet fixe  $A$ , un angle constant  $CAB$ ; les sommets  $B$  et  $C$  sont sur une droite fixe.

L'enveloppe du cercle circonscrit est un cercle.

*Lemme.* La courbe réciproque d'une circonférence est une circonférence touchant les tangentes menées du pôle à la circonférence donnée. La courbe réciproque d'une droite est une circonférence passant au pôle et touchant en ce point une parallèle à la droite donnée.

Soit  $A$  le sommet fixe de l'angle mobile  $CAB$ . D'un point quelconque  $O$  de la perpendiculaire  $AD$  et avec  $OA$  pour rayon je décris une circonférence. Elle rencontre les droites  $AB$  et  $AC$  aux points  $E$  et  $F$ .

L'enveloppe des droites telles que  $EF$  est une circonférence, puisque l'angle  $EAF$  est constant.

L'enveloppe des circonférences réciproques des droites  $EF$  est donc aussi une circonférence.

La courbe réciproque de  $EF$  passe par le pôle  $A$  et par les points  $B$  et  $C$ , réciproques des points  $E$ ,  $F$ ; elle est

donc la circonférence circonscrite au triangle CAB. **Donc**, etc.

(\*) On peut employer la même méthode pour résoudre la question suivante :

*D'un point S pris dans le plan d'une circonférence O on mène une sécante SAB, on décrit deux circonférences passant en S et tangentes à la circonférence O aux points A, B. Le lieu des points de rencontre C de ces circonférences est une circonférence décrite sur SO comme diamètre.*

Cette question donne lieu à un genre de transformation dans lequel à un point correspond un cercle, et à une ligne droite correspond un point.

Les questions que l'on obtiendra par ce procédé peuvent s'obtenir par deux transformations successives. A une question A en correspond une autre B, obtenue par la théorie des polaires réciproques; à cette dernière en correspond une autre C, obtenue par la théorie des rayons réciproques.

La question C que l'on obtient ainsi aurait été trouvée directement, si l'on avait appliqué à la question A le genre de transformation dont nous avons parlé plus haut.

*Remarque.* Soit N la courbe polaire réciproque d'une courbe M par rapport à un cercle dont le centre O est quelconque. *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les tangentes à la courbe N est la courbe réciproque de M. Réciproquement, la réciproque du lieu des pieds, etc.*

De cette remarque on déduit immédiatement ce théorème important bien connu : *La polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle décrit d'un de ses foyers*

(\*) Ce qui suit est de M. Mannheim.

*est un cercle.* En effet, la projection du foyer sur les tangentes est un cercle.

Un théorème analogue subsiste pour le triangle sphérique ABC, et se démontre par la projection stéréographique, qui n'est encore qu'une transformation par rayons vecteurs réciproques.

M. Genocchi (Angelo) ajoute qu'on peut se donner un autre point fixe O dans le plan du triangle ABC, et supposer que l'angle constant soit BOC au lieu de BAC. On verra que le centre du cercle circonscrit doit encore parcourir une hyperbole. Si, au lieu de l'angle BOC, on suppose constant le produit OBXOC, le même centre parcourt une ellipse, et l'on trouve enfin une parabole si la somme  $\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$  demeure constante.

Dans ces différents cas, les enveloppes des cercles circonscrits seront, en vertu d'un théorème de MM. Quetelet et Sturm, les *caustiques secondaires* par réflexions relatives aux coniques. Ce sont aussi les lieux des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les tangentes d'une conique, comme l'a démontré M. Dandelin, qui les désigne sous le nom général de *lemniscates*. (*Nouv. Mém.*, *Acad. de Bruxelles*, t. IV.)