# Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques. Problème des jeunes filles, de l'aveugle, etc.

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 18 (1859), p. 1-96 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__S1_0>

# BULLETIN

DE

# BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

# BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

## PROBLÈME DES JEUNES FILLES, DE L'AVEUGLE, ETC.

Chez les écrivains du moyen âge certains problèmes d'analyse indéterminée du premier degré sont cités sous les noms de *problema virginum*, *cæci* (*). Je crois que ces dénominations peuvent provenir des 45 *Epigrammata arithmeticorum* qu'on rencontre dans l'Anthologie grecque. Ces petits poemes roulent tous sur certains nombres entiers à deviner d'après certains caractères de divisibilité et de résidus qui, dans l'algèbre, mènent à des équations indéterminées du premier degré. Dans l'épigramme 3$^e$, Vénus se plaint à son fils de ce que les muses Clio, Euterpe, etc., lui ont enlevé un certain nombre de pommes, nombre qu'elle désigne énigmatiquement. Dans les épigrammes 4$^e$, 12$^e$, 13$^e$, 14$^e$, 15$^e$, ce sont encore des jeunes filles qui se partagent des pommes d'une manière analogue. Dans l'épigramme 41$^e$, Hésiode demande à Homère le *nombre* des navires grecs arrivés

(*) Et aussi *potatorum*, des buveurs Le melange des liquides fait partie de ce genre de problemes.

devant Troie, et Homère désigne ce nombre par des propriétés arithmétiques renfermées aussi dans une équation du premier degré à plusieurs inconnues; or, d'après la tradition, Homère était *aveugle*. On trouve les 44 *Epigrammata arithmeticorum* dans le Diophante de Bachet, et aussi dans Heilbronner, *Historia matheseos universæ*, p. 845, avec une traduction en vers latins, et avec les solutions algébriques.

Dans le *Philosophical magazine* (novembre 1858) le célèbre analyste J.-J. Sylvester (*) a résolu *complétement* le *Problema of the Virgins*, et a trouvé cette théorie générale de la *partition des nombres*.

Étant donné un nombre quelconque d'équations du premier degré moindre que le nombre des inconnues, trouver le *nombre* de solutions possibles en *nombres entiers*, lorsque ce nombre est déterminé. Solution qui n'avait jamais été obtenue que pour une équation unique à plusieurs inconnues. M. Lebesgue donnera incessamment dans les *Nouvelles Annales* une idée de cette importante découverte.

---

## THÉORÈME DE WARING SUR LES NOMBRES PREMIERS.

On lit dans la 3e édition (1782) des *Meditationes analyticæ*, au haut de la p. 379 :

*Omnis par numerus constat à duobus primis numeris et omnis impar numerus vel est primus numerus, vel constat è tribus primis numeris.*

Il est évident que si un nombre pair est la somme de

(*) Maintenant professeur a l'academie militaire de Woolwich.

deux nombres premiers, tout nombre impair, premier ou non, est la somme de trois nombres premiers.

Ainsi ce théorème, d'un énoncé si simple et dont la démonstration est bien plus difficile que celle du théorème de Fermat, appartient à Waring et non à Goldbach ; je l'ai dit par erreur (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 111) d'après la *Correspondance mathématique et physique* (Fuss).

## BIBLIOGRAPHIE.

### The mathematical Monthly.

(*Journal mensuel mathématique.*)

Vers 1824, M. Adrain, professeur de mathématiques à New-York, publiait un journal de mathématiques (*Mathematical Diary*) qui n'a pas eu longue durée.

Aujourd'hui M. Runkcle (John), auteur de nouvelles Tables pour déterminer les coefficients dans la fonction des perturbations planétaires (Cambridge, 1854), essaye une même publication. Auparavant, il a voulu consulter l'opinion publique et a obtenu 234 approbations qui promettent de soutenir le journal. La liste par ordre alphabétique est au commencement du mois d'octobre, premier numéro qui vient de paraître. Soixante-deux professeurs s'offrent comme permanents collaborateurs. Nous y remarquons M. Gould, célèbre directeur de l'observatoire Dudley, à Albany, plusieurs membres du bureau des longitudes de Malden, en Massachusets (*Nautical alm. office*). Le but du journal est (*to embrace students in one extreme, and professed mathematicians in the other; which extremes necessarily include all intermediate grades of teachers and laborers in this vast field*) de s'adresser par un bout aux étudiants et par l'autre aux mathématiciens de profession; ces deux bouts renferment nécessairement tous les degrés intermédiaires parmi ceux qui enseignent et cultivent ce champ si vaste. Un journal uniquement rempli de questions et de solutions ne remplirait pas ce double but. Il faut éviter l'*élévation* académique qui éloignerait les élèves, et aussi les *bas-fonds* du rudiment qui éloignent les gens instruits et sèment la graine toxique de l'*ennui*, mortelle à toute publication soit littéraire, soit scientifique; la tendance doit toujours être plutôt vers le zénith que vers le nadir. Là est la dignité humaine.

*Os homini sublime dedit : cœlumque tueri*
*Jussit, et erectos ad sidera tollere vultus.*

(*Metam.*, lib. I.)

Chaque numéro contiendra *cinq problèmes* intitulés : *Price problems for students*, problèmes à prix pour les étudiants. Celui qui aura résolu le mieux et le plus de problèmes lors du troisième numéro subséquent au numéro où ils ont été proposés, recevra 10 *dollars* (cinquante francs), et le second en mérite, un exemplaire relié du premier volume du journal.

Voici les cinq *price problems* du mois d'octobre :

I. Déduire $\theta$ de chacune des équations

$$\operatorname{tang}\theta\operatorname{tang}2\theta + \cot\theta = 2,$$
$$2\sin^2 3\theta + \sin^2 6\theta = 2,$$
$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = \cos\theta.$$

II. L'aire totale d'un cône droit étant triple de l'aire de la base, trouver l'angle au sommet.

III. La distance du centre d'une ellipse à la corde qui réunit les extrémités de deux demi-diamètres, formant un angle droit, est constante. Quelle partie de l'aire de l'ellipse est l'aire du cercle qui a pour rayon cette distance constante.

IV. Deux cercles de rayon R et $r$ se touchent extérieurement, $\theta$ est l'angle formé par les deux tangentes communes; prouver que l'on a

$$\sin\theta = \frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$

V. Les quatre centres des cercles qui touchent trois côtés d'un triangle étant réunis deux à deux, donnent six longueurs. Démontrer que les six milieux de ces longueurs sont sur la circonférence circonscrite au triangle.

Les solutions doivent être adressées avant le 10 décembre pour que les prix puissent être décernés en janvier 1859. Il est probable qu'on n'a en vue que des étudiants *américains,* quoique cela ne soit pas dit. Aucun étudiant ne peut obtenir *deux prix* la même année, mais obtenir une décision des juges.

En outre, cinq prix de 50, 40, 30, 20, 10 dollars seront décernés à des *mémoires* sur des sujets *ad libitum,* et par ordre de mérite.

On donne les noms des juges, mesure que nous avons demandée il y a plusieurs années pour les questions du grand concours, et même les noms de ceux qui proposent les questions. La responsabilité personnelle est une garantie; elles vont ensemble et disparaissent ensemble.

Le mois d'octobre, le seul que nous ayons reçu, contient : Une Note sur les fractions décimales, sur le plus grand commun diviseur, sur l'équation des payements, sur les formules de Neper, sur les dérivées; des propositions segmentaires sur la distribution des points sur une droite; formules sur un volume prismoïde, arches en ovale et à trois centres ; relation entre le minimum et l'état d'équilibre; sur les vitesses virtuelles; des problèmes et des théorèmes de géométrie élémentaire.

Le format est in-4; chaque numéro, de quatre feuilles, est très-bien imprimé, à Cambridge (Massachusets) à une lieue de Boston et qui possède la plus ancienne université des États-Unis, fondée en 1638. Le prix annuel d'abonnement sur lieu est de 3 livres sterling pour un exemplaire, de 5 pour deux, de 11 pour cinq, de 20 pour dix abonnements.

Puisse ce nouveau semeur de la sainte doctrine prospérer, et propager la seule science qui ne renferme que des vérités abritées contre toutes les passions cupides, au cachet terrestre.

L'Amérique possède déjà un excellent journal d'astronomie, exécuté avec beaucoup de soins et très-estimé; elle a cela en commun avec toutes les grandes nations civilisées, excepté une seule.

---

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK (CRELLE).

(T. LVI, cahier I, 1858, de 100 pages.)

*Géométrie.*

H. SCHROTTER (p. 27 à 44). *Sur les courbes à double courbure de troisième classe et du troisième ordre.*

L'ordre est indiqué par le nombre de points d'intersection avec un plan, et la classe par le nombre de plans osculateurs qui passent par un point donné. Tout le Mémoire roule principalement sur les plans osculateurs, et on établit ce principe, que toute courbe à double courbure du troisième ordre est aussi de troisième classe.

nouvelle analogie avec les coniques et qui a été indiquée déjà par M. Chasles.

Joachimsthal (p. 44 à 45). *Observations sur le Mémoire précédent, à l'aide de la géométrie algorithmique.*

Il ramène à quelques lignes les dix-huit pages de M. Schrötter.

*Analyse des formes.*

Arndt (Pierre-Frédéric) (*) (p. 64 à 71). *Solution d'un problème sur la décomposition des formes quadratiques.*

Est relatif au problème de l'article 236 des *Disquisitiones.*

Il s'agit de transformer par des substitutions linéaires à coefficients entiers la forme $AX^2 + BXY + CY^2$ dans le produit $(ax^2 + bxy + cy^2)(a'x^2 + b'xy + c'y^2)$, les *déterminants* de ces facteurs étant entre eux comme deux nombres carrés donnés.

Arndt (Pierre-Frédéric) (p. 72 à 78). *Sur le nombre de genres* (genera) *des formes quadratiques.*

Solution dilucidée du si difficile problème § 286 des *Disquisitiones,* à l'aide de deux théorèmes établis comme lemmes.

Arndt (Pierre-Frédéric) (p. 100). *Observation sur les formules qui expriment le nombre des classes des formes quadratiques.*

C'est une extension des formules contenues dans les

(*) Né le 23 août 1817, à Treptow sur la Rega; *privat-docent* à Berlin. On nomme ainsi ceux qui ont la permission de faire des cours publics, sans être professeurs.

célèbres *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres* de M. Dirichlet (*Crelle*, tomes XIX et XXI).

## *Analyse fonctionnelle.*

RUDOLF LIPSCHITZ, à Bonn (p. 11 à 26). *Sur la représentation de certaines fonctions par la formule sommatoire d'Euler.*

Cette formule sommatoire est celle du *Calcul différentiel*, p. 430 : $Sx = \int z dx + \frac{1}{2} z + \ldots$.

L'auteur la compare aux recherches de Jacobi sur la formule de Maclaurin (*Crelle*, t. XII, p. 263) et au Mémoire de Poisson sur le calcul numérique des intégrales définies (*Mémoires de l'Institut*, t. VI; 1827); il discute avec profondeur et délicatesse la série qui exprime $\log F(a)$; discussion déjà faite par M. Liouville (t. IV, p. 317), et recherche dans quelles limites la série d'Euler est légitime.

E. HEINE, à Halle (p. 79 à 86). *Extrait d'une lettre au Rédacteur sur les fonctions* E.

On trouve ces fonctions dans le *Journal* de M. Liouville (t. IV).

E. HEINE, à Halle (p. 87 à 99). *Quelques propriétés des fonctions* E *de M. Lamé.*

Notre illustre géomètre s'est servi de ces fonctions pour l'attraction des ellipsoïdes; M. Heine donne de nouvelles solutions et s'appuie sur une propriété de déterminants qu'on doit à M. Painvin (*Journal* de M. Liouville, 1858, p. 41 et 42).

### *Mécanique.*

NEUMANN, à Halle (p. 46 à 63). *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraelliptircorum classem revocatur.*

Un point se meut sur la sphère $x^2+y^2+z^2=1$; la fonction *potentielle* des forces qui agissent sur le point est $ax^2+by^2+cz^2$; $a$, $b$, $c$ sont des constantes positives ou négatives; $a>b>c$; on demande quel est le mouvement du point?

L'auteur fait usage des équations de Hamilton.

Application à l'attraction des ellipsoïdes.

A. CLEBSCHE, à Carlsruhe (p. 1 à 10). *Sur l'intégration des équations hydrodynamiques.*

C'est la suite d'un autre Mémoire sur le même sujet (*Crelle*, t. LIV, p. 254).

---

INDICES FRACTIONNAIRES, DIFFÉRENTIELS ET D'INTÉGRALES.

LEIBNITZ. — La première idée de ces indices est due à Leibnitz; on la trouve dans une Lettre adressée à Wallis, t. III des Œuvres de celui-ci, et dans plusieurs Lettres de la Correspondance entre lui et Jean Bernoulli.

EULER. — La première théorie est d'Euler, t. V des *Comm. de St.-P.*, où il cherche les termes interpolés d'une série dont le coefficient du $n^{\text{ième}}$ terme est $n!$ $n$ étant entier; il suppose ensuite $n$ fractionnaire et exprime les coefficients par des intégrales définies.

LAPLACE.

LIOUVILLE. $\frac{d\alpha^{\mu} e^{mx}}{dx^{m}} = m^{\mu} e^{mx}$, même pour $\mu$ fractionnaire.

TARDY. — Au Congrès de Milan en 1844.

PEACOCK. — *Report of the* 3[e] *meeting of the britisch Association.*

GREATHEED. — *Cambridge mat. Journal*, t. V, p. 1.

KELLAND. — *Transactions of the R. Society of Edinburgh*, t. V, p. 14 et 16.

CENTER. — *Camb. and Dub. mat. Journal*, t. V, p. 3 et 4.

LIOUVILLE. — T. XX, p. 116.

TARDY. — *Annali di mat. pura, etc.*, t. I, majo-giugno; 1858 (d'où ceci est extrait). Travail remarquable.

---

THÈSES PRÉSENTÉES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, le 7 août 1854; par M. *C.-Alph. Valson*. In-4 de 28 p. — M. Chasles, Président; MM. Lamé, Delaunay, examinateurs. Dédiées à M. Joseph Bertrand, professeur de M. Valson.

THÈSE D'ANALYSE.

*Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la géométrie de l'ellipsoïde.*

Cette thèse renferme trois parties.

La première partie contient les propriétés connues des lignes de courbure et des sections principales (Moigno, *Calcul différentiel*, 35[e] leçon) et aussi les théorèmes de Jacobi sur les lignes géodésiques (*Journal* de M. Liouville, t. XI, p. 105). On y remarque ce théorème : *Si un mobile se meut librement sur un ellipsoïde, la pression* *qu'il exerce sur la surface est proportionnelle au cube de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent.*

La seconde partie renferme les propriétés focales identiques à celles que M. Weierstrass a communiquées comme théorèmes nouveaux à l'Académie de Berlin au nom de M. Hellermann, et que nous avons consignées t. XVI, p. 242. C'est ce qu'il était bien permis à l'illustre analyste d'ignorer; puisque moi, habitant de Paris, à l'affût des nouveautés scientifiques, je l'ignorais; et ce qu'il y a de singulier, c'est que ces théorèmes si importants, si longtemps cherchés, qui transportent aux surfaces quadratiques les propriétés des lignes quadratiques, foyers et directrices, et assignent aux lignes de courbure un nouveau rôle, n'ont été nullement remarquées; et, comme il arrive assez souvent, les découvertes *indigènes* ne nous arrivent que par la voie *aborigène*.

De là, M. Valson passe aux propriétés projectives sur les sections circulaires et parvient encore à de très-belles propositions. Le point de départ est un théorème de M. Michael Roberts (*Journal* de M. Liouville, t. XV, p. 289). Soient $\mu$ et $\nu$ deux coordonnées d'un point M de l'ellipsoïde, M′ la projection de M sur une section circulaire par une parallèle à $oz$; si F et F′ sont les projections semblables des ombilics sur la même section circulaire; désignant par $\mu_0$, $\nu_0$ les demi-axes des courbes homofocales ayant F et F′ pour foyers et passant par le point M′: on a

$$\mu = \nu\mu_0, \quad \nu = \alpha\nu, \quad \alpha = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}}.$$

Ainsi

$$F(\mu, \nu) = 0$$

étant l'équation d'une ligne tracée sur l'ellipsoïde, sa projection sur la section circulaire sera

$$F(\alpha\mu_0, \alpha\nu_0) = 0.$$

L'auteur considère ensuite des sphères concentriques aux sphères focales et parvient à généraliser ainsi le théorème de M. Roberts cité ci-dessus : Savoir si une courbe tracée sur l'ellipsoïde est définie par l'équation

$$F(\mu, \nu, t, t') = 0,$$

où $t$ et $t'$ sont un couple de tangentes menées du point M à deux sphères concentriques aux sphères *focales;* sa projection sur la section circulaire parallèlement à l'axe $oz$ a pour équation

$$F(\alpha\mu_0, \alpha\nu_0, \alpha t_0, \alpha t'_0) = 0;$$

$t_0$, $t'_0$ sont un couple de tangentes passant par le point M, à deux cercles ayant pour centres les foyers F et F$'$ des courbes homofocales.

Tout ce beau travail se résume en cet énoncé :

*Si une propriété a lieu entre les tangentes qu'on peut mener par les points d'une courbe à deux cercles dans un plan, il y aura une propriété correspondante entre les tangentes qu'on peut mener des divers points d'un ellipsoïde aux deux sphères focales ou à deux sphères qui leurs soient concentriques* (p. 17).

La troisième et dernière partie traite des lignes *rectifiables* qu'on peut rencontrer sur l'ellipsoïde; on parvient naturellement aux lignes géodésiques et à des lignes dont l'équation est de même forme que celle des lignes géodésiques; et le tout est terminé par des considérations sur les trajectoires *obliques* des lignes géodésiques.

Cette belle thèse est un progrès. Le jeune professeur s'est montré fidèle à la devise de la nouvelle génération : *go a head.*

## QUESTION DE PRIX

### Proposée par l'Académie des Sciences de Berlin.

*Die theorie der Krummungs-Linien der flächen in irgend einem wesentlichen Punkte zu vervollständigen.*

« Compléter en quelque point essentiel la théorie des » lignes de courbure des surfaces. »

Il ne s'agit pas d'augmenter le nombre des surfaces dont on puisse connaître les lignes de courbure, mais de considérations plus générales, plus importan es : par exemple, de chercher les conditions nécessaires pour que les lignes de courbure des surfaces algébriques soient elles-mêmes des courbes algébriques, ou bien la détermination de ces genres de courbes sur les surfaces du troisième ordre ou d'un ordre supérieur.

Les Mémoires peuvent être rédigés en allemand, en latin ou en français. Le terme d'envoi est fixé au 1er mars 1861, et le prix de 100 ducats (1175 francs) sera décerné à la séance publique, anniversaire de Leibnitz, au mois de juillet 1861.

Chaque Mémoire doit porter une devise sur un bulletin cacheté contenant le nom de l'auteur.

## NOTE SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES;

D'APRÈS M. OTTO BÖKLEN.

Schlömilch *Zeitschrift*, cahier IV, 1858, p. 257.

1. Gauss a démontré que toutes les lignes géodésiques d'égale longueur qui partent d'un même point d'une surface sont perpendiculaires sur la courbe formée par les extrémités de ces lignes. De là, en faisant usage des mêmes considérations infinitésimales usitées pour les coniques planes, on peut déduire le théorème qui suit :

THÉORÈME. *Étant pris sur une surface deux points fixes et un point variable dont la différence des distances géodésiques aux points fixes soit constante, la ligne décrite par le point variable divise en parties égales l'angle formé par les distances et l'angle supplémentaire lorsque la* somme *est constante; et, réciproquement, si le point variable bissecte l'angle des distances ou son angle adjacent, la différence des distances ou la somme sera constante.*

2. Soient A et B les points fixes, M le point variable. Si l'on pose

$$\mathrm{MA} - \mathrm{MB} = \mu,$$

$$\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \nu;$$

$\mu$ et $\nu$ étant des constantes. En donnant à $\mu$ et à $\nu$ diverses valeurs, on trace sur la surface deux systèmes de lignes homofocales et se coupant à angle droit; même démonstration que pour les coniques planes.

3. *Lemme.* Si l'on prend un point quelconque sur une ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde, et que par

ce point on mène une tangente à la ligne et un plan tangent à la surface, la distance du centre au plan tangent multiplié par le diamètre parallèle à la tangente donne un produit constant pour tous les points de cette ligne géodésique. (Jacobi.)

4. *Lemme.* Si par un point d'un ellipsoïde, on mène les deux tangentes aux deux *lignes de courbure* qui passent par ce point, ces tangentes sont parallèles aux axes de l'ellipse diamétrale parallèle au plan des deux tangentes.

5. Théorème. *Si l'on prend sur l'ellipsoïde pour points focaux les deux* ombilics A *et* B, *et que, pour le point variable* M, *on ait*

$$MA - MB = \mu,$$
$$MA + MB = \nu;$$

*faisant varier* $\mu$ *et* $\nu$, *les deux systèmes homofocaux* (nº 2) *sont des lignes de courbure.*

*Démonstration.* Le produit constant (Jacobi) en M est le même qu'en A et B, il est donc le même pour l'arc MA et pour l'arc MB; donc sont égaux les diamètres parallèles aux tangentes menées par M aux deux arcs; ainsi les axes de l'ellipse qui passe par ces deux diamètres sont bissecteurs des angles de ce diamètre; donc aussi les tangentes en M parallèles à ces diamètres sont bissecteurs des angles formés par les tangentes aux axes géodésiques. Donc la courbe lieu du point M est une ligne de courbure (nº 4). Lorsque cette ligne passe entre A et B, on a

$$MA + MB = \mu,$$

et lorsqu'elle laisse les points d'un même côté, on a

$$MA - MB = \nu.$$

Ce théorème est de M. Michael Roberts (*Journal* de

M. Liouville, t. XI, p. 1), mais qui le démontre à l'aide de fonctions elliptiques. Ainsi les deux lignes de courbure qui sur un ellipsoïde passent par un point donné, jouissent de cette propriété : dans l'une, la somme des distances aux ombilics est constante, c'est celle qui passe entre les deux ombilics ; et dans l'autre, c'est la différence qui est constante.

6. Ces théorèmes sont susceptibles d'être généralisés au moyen du théorème suivant, aussi de Gauss :

*Si de tous les points d'une ligne quelconque tracée sur une surface on mène orthogonalement et du même côté des lignes géodésiques de même longueur, elles coupent à angle droit la ligne qui réunit leurs extrémités.*

*Note du Rédacteur.* Réunissant les deux ombilics par une ligne géodésique et faisant passer deux lignes de courbure par un ombilic, on en conclut facilement qu'il y a une infinité de lignes géodésiques qui joignent les deux ombilics ; que ces lignes sont d'égale longueur ; que les sections normales aux ombilics sont d'égale courbure en ces points.

Cette dernière propriété sert à définir les ombilics sur une surface quelconque.

Lorsque la ligne géodésique passe par les ombilics, la tangente en MA et la tangente MB coïncident (*voir* ci-dessus) ; donc le diamètre parallèle à cette tangente est l'axe de l'ellipse ; par conséquent, au point A, une ligne de courbure touche la ligne géodésique et la coupe orthogonalement ; une nappe de lignes de courbure qui passent par une ligne géodésique a pour ènveloppe cette ligne géodésique et l'autre nappe a pour enveloppe une certaine développée de la ligne géodésique.

# BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(voir p. 6).

(T. XLVI, 2e cahier, 101 à 188 pages.)

## *Géométrie.*

JOHANN NIK. BISCHOFF, à Munich (p. 166 à 177). *Quelques théorèmes sur les tangentes des courbes algébriques.*

Ces théorèmes sont des applications des théorèmes algebriques suivants :

*Théorèmes algébriques.*

1°. $$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m),$$

et le dernier terme T de l'équation qui a pour racines les sommes des racines $\alpha$ prises deux à deux est une fonction entière des $a$, de degré $m - 1$.

2°. Les $a$ étant des fonctions de $m$ variables,

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1};$$

les fonctions en $y_0$ étant de degré $g_0$, la fonction en $y_1$ de degré $g_1$, etc., le terme T devient une fonction entière de ces mêmes variables et si la série des $g$ forme une progression arithmétique, de sorte que l'on a

$$g_i = g_0 + id,$$

le degré T relativement aux variables monte au degré

$$\frac{1}{2}(m-1)(g_0+g_m).$$

3°. Dans la même hypothèse, si *au moins* l'une des racines de l'équation $y_1, y_2, \ldots$ est la *moitié* d'une autre racine, l'équation de condition relativement aux variables monte au degré

$$(m-1)(2g_0+md)\ (^*).$$

4°. Dans la même hypothèse, si *au moins* l'une des racines est une moyenne arithmétique entre deux autres racines, l'équation de condition monte relativement aux variables au degré

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(2g_0+md).$$

5°. Les $a$ restant constants, si *au moins* l'une des racines $\alpha$ est une moyenne arithmétique entre deux autres racines, l'équation de condition relativement aux $a$ monte au degré

$$\frac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

## *Théorèmes géométriques.*

1°. Une courbe d'ordre $m$ a

$$\frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+4)$$

tangentes telles, que le point de contact est au milieu

(*) Le tout est fondé sur la théorie des fonctions symétriques qu'on n'enseigne plus.

Ἐν ολίγοις ὁ λόγος τῆς σιγῆς κρειττων.

(PINDARE, *Pyth.* od. I.)

entre deux des $m-2$ points d'intersection de cette tangente avec la courbe; et ces points de contact sont sur une courbe d'ordre

$$\frac{1}{2}(m-2)(m-3)(m+4).$$

2°. Une courbe d'ordre $m$ a

$$m(m-2)(m-3)(m+4)$$

tangentes telles, qu'un des points d'intersection est au milieu entre un autre point d'intersection et le point de contact.

3°. Une courbe d'ordre $m$ (*) a

$$m(m-2)(m-3)(m^2-m-8)$$

tangentes telles, que le point de contact est au milieu entre deux points d'intersection, ou bien qu'un point d'intersection est au milieu entre deux autres points d'intersection.

*Théorèmes géométriques; contacts de courbes.*

4°. Étant donnés $\frac{m(m+3)}{2}-1$ points *fixes* et une courbe de degré $n$; il existe $n(n+2m-3)$ lignes d'ordre $m$ qui passent par les points fixes et touchent (contact bi-ponctuel) la courbe d'ordre $n$.

5°. Si une courbe d'ordre $m$ doit toucher (contact simple) une courbe d'ordre $n$, l'équation de condition monte au degré $n(n+2m-3)$ relativement aux coefficients de la première courbe.

6°. Étant donnés $\frac{m(m+3)}{2}-\mu$ points fixes et $\mu$ cour-

---

(*) M. Bischoff attribue ce théorème à Steiner (voir *Journal* de M. Liouville, t. XVIII, p. 348, 1853). Ce Mémoire remarquable traduit par M. Woepcke renferme principalement des propriétés polaires et segmentaires.

bes d'ordres respectifs, $n_1$, $n_2$, $n_3$,..., $n_\mu$, il existe

$$n_1 n_2 n_3 \ldots n_\mu (n_1 + 2m - 3)(n_2 + 2m - 3) \ldots (n_\mu + 2m - 3)$$

courbes d'ordre $m$ qui passent par les points fixes et touchent (contact simple) les $\mu$ courbes.

Exemple :

$$m = 2, \quad \mu = 5, \quad n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 2 \ (*)$$

5 coniques sont touchées simultanément par $6^5 = 7776$ coniques.

7°. Le nombre de courbes d'ordre $m$ qui passent par $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points fixes et touchent en contact *triponctuel* une courbe d'ordre $n$, est $3n(n+m-3)$; et on peut faire passer une courbe d'ordre $3(n+m-3)$ par les points de contact.

8°. L'équation de condition pour que deux courbes d'ordre $m$ et $n$ se touchent monte *au plus* au degré

$$2mn + (m+n)(m+n-3)$$

relativement aux coefficients des deux courbes.

9°. Le nombre de courbes d'ordre $m$ qui passent par $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points fixes et ont un *double* contact avec une courbe d'ordre $n$ est

$$\frac{1}{2} n^2 (n + 2m - 3)^2 - n(5n + 6m - 15).$$

Faisant

$$m = 1,$$

(*) Cela paraît faux lorsque $m = 2$ et les $n = 1$, car on a

$$\frac{m(m+3)}{2} - \mu = 5 - \mu.$$

Donc le nombre de coniques qui passent par $5 - \mu$ points et touchent $\mu$ droites est $2^\mu$ ; ce qui est faux pour $\mu = 5$.

on a

$$\frac{1}{2} n^2 (n-1)^2 + n(5n-9) = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)$$

doubles tangentes par une courbe d'ordre $n$.

*Contacts de surface.*

10°. Le nombre de surfaces d'ordre $p$ qui passent par $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 2$ points fixes et touchent (contact bi-ponctuel) une courbe à double courbure d'ordre $mn$ (intersection de deux surfaces d'ordres $m$ et $n$) est

$$mn(m+n+2p-4).$$

11°. Le nombre de surfaces d'ordre $p$ qui passent par $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} - 3$ points et touchent une courbe à double courbure d'ordre $mn$, contact tri-ponctuel, est

$$3\, mn\,(m+n+p-4).$$

12°. Si dans le cas précédent, au lieu d'un contact tri-ponctuel, il y a double contact, le nombre de surfaces est

$$\frac{1}{2} m^2 n^2 [m+n+2p-4]^2 - mn\,[5m+5n+6p-20].$$

13°. Faisant $p=1$, il s'ensuit que la surface développable qui a la ligne $mn$ pour arête de rebroussement est de la classe $3\, mn\,(m+n-3)$ et que par chaque point de l'espace passent des *plans* qui ont un double contact avec les courbes $mn$ au nombre de

$$\frac{1}{2} m^2 n^2 (m+n-2)^2 - mn\,(5m+5n-14).$$

Cayley (A.), p. 182 à 185. *Note sur les normales d'une conique* (en français).

*Théorème de Joachimstal.* ABCD est un quadrilatère inscrit dans une conique tel que les normales qui passent par les quatre sommets se coupent en un seul point. Soit O le centre de la conique, P le pôle de AB; prolongeons PO d'une longueur égale à elle-même dans le sens PO; soit $P'O = PO$; la droite qui réunit les projections P′ sur les axes principaux se confond avec le côté CD. (*Nouvelles Annales*, t. VI, p. 369.)

M. Cayley généralise ce théorème.

## *Analyse.*

Kronecker (L.), p. 188 à 188. *Sur les équations cubiques à coefficients rationnels.*

L'équation

$$r^3 + s^3 - 1 = 0$$

ne peut être satisfaite par des valeurs rationnelles que par $r = 0$, $s = 1$, ou $r = 1$, $s = 0$ (Fermat).

Posons

$$r = \frac{2a}{3b+1}, \quad s = \frac{3b+1}{3b-1}, \quad b = -\frac{1}{3}, \quad a = -1$$

(correspond à $r = -1$, $b = 0$),

on obtient

$$(3b-1)^3(r^3 + s^3 - 1) = 2(4a^3 + 27a^2 + 1) = 0,$$

$$ma = -1, \quad b^2 = \frac{1}{9};$$

soit l'équation

$$x^3 + ax + b = 0,$$

le dernier terme de l'équation au carré des différences est

$$-4a^3-27b^2 \text{ (valeur négative du \textit{discriminant}).}$$

Pour le cas actuel, l'équation est

$$x^3-x\pm\frac{1}{3}=0\,;$$

c'est donc la seule équation cubique à coefficients rationnels pour laquelle la somme des racines est nulle et où le discriminant est égal à l'unité (car $-4a^3-27b^2=1$). Les trois racines sont

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{9},\quad \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{9},\quad \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{9}{4\pi}.$$

Le théorème de Fermat sur l'équation $x^3+y^3=z^3$ peut donc s'énoncer sous cette forme remarquable :

*Le discriminant d'une équation cubique complète à coefficients rationnels ne peut devenir la* sixième *puissance d'un nombre rationnel à moins que les trois racines ne soient de la forme*

$$m+n\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9},\quad m+n\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9},\quad m-n\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{9},$$

m *et* n *étant des nombres rationnels.*

$-3m$ est le coefficient de $x^2$.

Arndt (F.), p. 178 à 181. *Démonstration simple de l'irréductibilité de l'équation relative à la division du cercle.*

Cette équation est

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1=0.$$

Kronecker a donné une démonstration lorsque $n$ est un nombre entier quelconque (Liouville, 1854, p. 177), et d'autres démonstrations pour le cas où $n$ est un nombre premier ou puissance de nombre premier (Liouville, 1856) et (*Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 419, et t. IX, p. 348); les démonstrations de Gauss (*Disq.*, § 341) et d'Eisenstein (Crelle, t. XXXVII) ne paraissent pas pouvoir s'étendre au cas général.

La démonstration actuelle est fondée sur ce lemme :

Soient les équations

$$x^m - \lambda_1 x^{m-1} + \lambda_2 x^{m-2} \ldots = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = \Pi(x-\alpha),$$

$$x^m - \mu_1 x^{m-1} + \mu_2 x^{m-2} \ldots = (x-\alpha^e)(x-\beta^e)(x-\gamma^e)\ldots = \pi(x-\alpha^e).$$

Les $\lambda$ sont des nombres entiers, $e$ est un nombre entier positif.

Les $\mu$ seront aussi des nombres entiers; si $e = p^\pi$, $p$ étant un nombre premier et $\pi$ un nombre entier positif, on a la congruence

$$\Pi(x - \alpha^e) - \Pi(x - \alpha) = \dot{p},$$

(le point leibnitzien désigne le multiple de $p$.)

## *Arithmologie.*

Cayley (p. 186 à 187). *Addition à la Note sur la composition du nombre 47 par rapport aux vingt-troisièmes racines de l'unité.*

Soit $\alpha$ une racine complexe de l'équation

$$x^{23} - 1 = 0,$$

on a cette remarquable identité communiquée à M. Cayley par M. Kummer

$$(\alpha^2 + \alpha^{21})(\alpha^{16} + \alpha^{13} + \alpha^8 + \alpha^{15} + \alpha^7 + \alpha^{16})^3$$

$$= (\alpha^8 + \alpha^{15})(\alpha^9 + \alpha^{14})(\alpha^{10} + \alpha^{13})^2(\alpha^{11} + \alpha^{12})\,F(\alpha)\,F\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

$$F(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^9 + \alpha^{10} + \alpha^{16} - \alpha^{20} + \alpha^{22}.$$

M. Cayley ramène

$$\frac{\alpha^2 + \alpha^{21}}{(\alpha^8 + \alpha^{14})(\alpha^9 + \alpha^{14})(\alpha^{10} + \alpha^{13})^2(\alpha^{11} + \alpha^{12})}$$

à cette forme

$$\begin{gathered}
-23\alpha + 2\alpha^2 - 20\alpha^3 - 21\alpha^5 - 3\alpha^6 \\
-17\alpha^7 - 4\alpha^8 - 14\alpha^9 - 8\alpha^{10} - 12\alpha^{11} \\
-23\alpha^{22} + 2\alpha^{21} - 20\alpha^{20} - 21\alpha^{18} - 3\alpha^{17} \\
-17\alpha^{16} - 4\alpha^{15} - 14\alpha^{14} - 8\alpha^{13} - 12\alpha^{12},
\end{gathered}$$

et le profond investigateur déduit d'une manière admirable que les coefficients de $F(\alpha)$ doivent être $1, 1, 1, 1, 1, -1, 1$.

## *Calcul infinitésimal.*

A. Clebsch (p. 122 à 148). *Sur la variation seconde des intégrales multiples.*

On sait que cette variation seconde fournit un criterium des maximums et des minimums pour des intégrales simples. On est parvenu, par des intégrations partielles, à ramener ces variations secondes à une forme plus simple, mais à l'aide d'intégration d'un système d'équations différentielles assez compliquées. Jacobi le premier a fait voir que pour des intégrales simples à une *seule* variable, il existait une connexion entre ce système et celui qui amène l'évanouissement de la variation première, et dans ce cas l'intégration de ces équations *transformatrices* s'opère sans difficulté.

Dans un précédent Mémoire, M. Clebsch (t. LV) a montré que le principe de Jacobi peut s'étendre à tous les problèmes du calcul des variations lorsqu'il ne s'agit que d'intégrales *simples*. La recherche des variations secondes a été ramenée à la recherche des valeurs que peut prendre une fonction homogène du second ordre dont les paramètres sont liés par certaines équations de conditions linéaires. Dans ce Mémoire, on établit aussi une telle fonction lorsque même l'intégrale est multiple.

G. Bauer (p. 101 à 121). *Sur les coefficients des séries dont les termes sont des fonctions* sphériques *d'une seule variable.*

Soit

$$X_n = \frac{1}{2.4.6\ldots 2n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Ces fonctions $X_n$ sont dites *sphériques*, parce qu'on les rencontre dans les problèmes sur l'attraction des sphéroïdes.

Soit $f(x)$ une fonction donnée de $x$.

Posons

$$f(x) = \sum A_n X_n$$

ou

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} fx\, X_n\, dx.$$

Le but de ce Mémoire est le calcul des coefficients A. M. Lejeune-Dirichlet a traité cette question pour le cas où $f(x) = x^k$ (*Journal* de M. Liouville, 1857), et par une méthode qui n'est pas élémentaire. Même dans ce cas si simple, le calcul effectif des A est très-compliqué. Par des considérations très-élémentaires, M. Bauer donne ces coefficients pour beaucoup de cas.

*Exemples :*

1°. $\quad f(x) = e^{ax}, \quad A_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2a} P_n e^a - Q_n e^{-a},$

$$e^{-2a} = \frac{1}{1} = \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{a} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{a} + \cfrac{1}{\cfrac{7}{a} + \ldots}}}}$$

$P_n$ est le numérateur et $Q_n$ le dénominateur de la $n^{ième}$ réduite de cette fraction continue, ou encore de cette seconde fraction continue :

$$\operatorname{tang} a = \frac{a}{1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{a} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{a} - \ldots}}}}$$

C'est une conséquence des relations

$$P_{n+1} - P_{n-1} - \frac{2n+1}{a} P_n = 0,$$

$$Q_{n+1} - Q_{n-1} - \frac{2n+1}{a} Q_n = 0.$$

2°. $fx = (1 - a^2 x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $A_{2n} = Q_{2n} \frac{\arc\sin a}{a} P_{2n} \sqrt{1 - a^2}$,

$Q_n$ et $P_n$ sont déterminés par les deux termes d'une réduite de fraction continue. L'auteur déduit plusieurs conséquences intéressantes, entre autres :

$$Q_{2n} = (4n + 1) \left( \frac{1.3 \ldots 2n - 1}{2.4 \ldots 2n} \right)^2,$$

$$X_{2n} = (-1)_n \frac{1.3.5 \ldots 2n - 1}{2.4 \ldots 2n},$$

$$\frac{2}{\pi} = \sum Q_{2n} X_{2n}.$$

Ainsi

$$\frac{2}{\pi} = 1 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^3 - 13\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^3 + \ldots,$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}}$$

$$= \pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) r^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) r^4 + \ldots\right]$$

3°.
$$f(x) = (a + x)^m;$$

$A_n$ se détermine encore par une fraction continue qui devient finie lorsque $m$ est un nombre entier positif.

Lorsque $a = 0$ et $m$ est entier positif, l'auteur trouve, d'accord avec M. Dirichlet,

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \frac{m(m-2)\ldots m-n+2}{m+1 . m+3 \;..\; m+n+1} \quad (n \text{ pair}),$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \frac{m-1 . m-3 \ldots m-n+2}{m+2 . m+4 \ldots m+n+1} \quad (n \text{ impair}),$$

déjà trouvé par Legendre (*Recherches sur la figure des planètes*, Académie des Sciences, 1784).

L'auteur considère les cas de $a = -1$ et $m$ entier négatif, et en déduit la sommation de plusieurs séries, entre autres de celle-ci

$$1 + \frac{a^2}{2.(2n+3)} + \frac{a^4}{2\;4.2n+3.2n+5}$$

$$+ \frac{a^6}{2.4.6.2n+3.2n+5.2n+7},$$

et celle où les termes de rang pair sont négatifs.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Vierd deel. — Mémoires de l'Académie des Sciences. 4e partie., Amsterd. C. G. von der Post, 1858.

### TABLES D'INTÉGRALES DÉFINIES,

Par D. Bierens de Hann.

De XVI—572 pages.

Il est superflu de faire ressortir l'immense utilité d'une telle collection auprès des géomètres compétents, et il serait ridicule d'insister auprès de ceux qui ne sont pas compétents. Pour peu qu'on s'occupe de l'analyse infinitésimale, ce recueil devient indispensable; car il est mieux ordonné, plus méthodique et plus complet que tout ce qu'on a publié en ce genre, et a peut-être le défaut rare d'être trop complet; la description de certains ouvrages suffit pour en faire apprécier le mérite; tel est celui-ci.

L'ouvrage, entièrement écrit en français, se compose de 447 tables distribuées sur 572 pages in-4°. Chaque table a pour en-tête : 1° la nature des expressions à intégrer (algèb. transcend., etc.); 2° le quantième de la table; 3° les limites entre 0 et 1, 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ à $\infty$. Ces trois indications sont renfermées entre deux lignes parallèles: ensuite au-dessous les expressions intégrales avec les noms des calculateurs, des ouvrages et l'indication des pages (*).

Les exemples sont numérotés et placés les uns au-dessous des autres, et le quantième de la page est au bas de la page. L'ouvrage commence à la page 25.

Dans la préface l'auteur indique quatre buts qu'il a

(*) A ces renseignements, on reconnaît que l'auteur n'est pas Français cherché à remplir : 1° écrire les différents résultats d'une manière méthodique et bien ordonnée; 2° donner les divers modes de déduction : la réalisation de cette idée aurait rendu l'ouvrage extrêmement volumineux; on a dû se contenter d'indiquer les ouvrages où l'on peut trouver ces déductions ; 3° donner un tableau historique et bibliographique de cette branche de l'analyse. A cet effet, l'auteur avait demandé des renseignements par la voie des journaux scientifiques; mais personne n'a répondu à son appel; de sorte que ce but n'a pu être complétement atteint. L'auteur n'avait à sa disposition que les collections académiques et les Journaux de Crelle et de Liouville. Il y a 68 géomètres de cités dont 17 sont Français, savoir : Abria, Berge, Bertrand, Binet, Bonnet (Ossian), Catalan, Cauchy, Delaunay, Fourier, Lamé, Laplace, Lebesgue, Lefort, Legendre, Liouville, Poisson, Serret. Enfin le quatrième but était l'examen de certaines intégrales définies dont les résultats sont contestés. L'auteur indique pourtant ces résultats sans se permettre de les juger, même lorsque ses opinions sont bien fixées. Les calculs des intégrales connues ont été vérifiés, l'auteur a soin d'indiquer les fautes et de les rectifier; et par la méthode des intégrales partielles, l'auteur a donné de nouvelles intégrales; les résultats sont au nombre d'à peu près 3 200; près de 780 corrections et observations critiques remplissent 8 pages.

Cette collection contient trois parties. Chaque partie est divisée en sections selon que les fonctions sont algébriques, exponentielles, logarithmiques, circulaires, directes ou inverses, et chaque section est subdivisée, selon que les fonctions sont monômes, binômes, polynômes, rationnelles, irrationnelles, entières, fractionnaires, et aussi selon les limites des intégrales.

Première partie (table I à III, six sections).

Intégrales de fonctions ne contenant qu'une espèce de fonctions.

Algébrique (1 à 35) rationnels et entiers.

*Exemples :*

$$(1 - x^b)^p x^{q-1} dx \quad \text{(limite 0 à 1).}$$

Fractionnaire.

*Exemples :*

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{p+1}}{x^p} dx \quad \text{(OEttinger);}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{q-1} dx}{1 - x^q} \quad \text{(Lebesgue, p. 31);}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{dx}{1+px} \quad \text{(Bertrand, p. 35);}$$

$$\int_0^1 \frac{1-x^a}{(1+x)^{a+1}} \frac{dx}{1-x} \quad \text{(Serret);}$$

$$\int_0^1 x^{2a}(1-x^2)^{b-\frac{1}{2}} dx \quad \text{(Euler);}$$

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \quad \text{(Catalan, p. 43);}$$

$$\int \frac{x^{p-1} + x^{q+1}}{(1-x^2)^{\frac{p+q}{2}}} \quad \text{(Serret, p. 44);}$$

$$\int \frac{x^{\frac{q}{2}} dx}{(1-x)(1-p^2 x)^{\frac{q+1}{2}}} \quad \text{(Boncompagni, p. 49);}$$

A partir de la table 18 les limites viennent de o à $\infty$, $-\infty$ à $+\infty$,

$$\int \frac{(p+xi)^{a-1}}{(1-p-xi)^{a+b}}\,dx \quad \text{(Cayley, p. 68).}$$

Legendre, Poisson, Cauchy, Raab, Œttinger, Schlömilch.

Deuxième partie (table 112 à 375, p. 169 à 483; sections VII à XX).

Intégrales de fonctions composées de deux fonctions.

*Exemples :*

Table 116, p. 173,

$$\int e^{-xe^{qi}} x^{a-1}\,dx \quad \text{(L. o à } \infty\text{) (Serret).}$$

Table 127, p. 186,

$$\int \left(e^{-x} + \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} \quad \text{(L. o à } \infty\text{) (Stern).}$$

Table 142, p. 205,

$$\int e^{ix}(r+ix)^{a-1}\,dx \quad \text{(L. } -\infty \text{ à } +\infty\text{) (Cayley).}$$

A partir de la table 151 apparaissent les transcendantes $(lx)^a$.

A partir de la table 161, logarithmes combinés avec des lignes trigonométriques.

*Exemples :*

$$\int \left[\frac{1-x}{l'x} + \frac{x}{(lx)^2}\right] dx = -1 + lx \quad \text{(L. o à 1) (t. 168, p. 234).}$$

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{lx}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{(table 178, p. 270). (O. Bonnet).}$$

Dans la table 191, on renoontre des $ll$.

*Exemples .*

$$\int_0^\infty llx \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi\, l\left(\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\sqrt{2\pi}\right) \quad \text{(Malmsten).}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin qx \cos x}{x} dx &= \frac{1}{2}\pi, \quad q > 1,\\ &= 0, \quad q < 1,\end{aligned}\right\} \quad \text{(t. 195, p. 270) (Serret).}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos bx . x^{\pm 2a}}{1 - 2p\cos x + p^2} dx = (-1)^a \pi \frac{p^b}{1-p^2}(lp)^{\pm 2a}$$

(t. 250, p. 342) (Bierens de Haan).

$$\int_0^\infty e^{-px} l(q-x)^2 dx = \frac{1}{p}[lq^2 - 2e^{-pq}\mathrm{E}\, i(pq)]$$

(Bierens de Haan).

$$\mathrm{E}\, i(pq) = \int_{-pq}^\infty \frac{e^{-pq}\, d(pq)}{pq} \quad \text{(exponentielle intégrale, p. 369).}$$

Les noms qui apparaissent le plus fréquemment dans cette partie, sont Binet, Cauchy, Laplace, Poisson, Raab, Schlômilch, et aussi quelquefois Dienger, Œttinger et Lobatschewsky (de Casan), Malmsten.

Les tables 252, 253, 254, 262 renferment les fonctions elliptiques.

Troisième partie (tables 376 à 447, p. 487 à 572, sections XXI à XXVI).

Contient les intégrales des fonctions à argument de plusieurs fonctions.

*Exemples :*

$$\int_0^{\infty} e^{-qx^a}(qx^a - p)\, x^{ap-1}\, lx\, dx = \frac{1}{a^2 q^p}\,\Gamma(p),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \sin qx . x^{r-1}\, dr$$

$$= \frac{\Gamma(r)}{p^r} \cos^r\left(\text{arc tang}\,\frac{q}{p}\right) \sin\left(r\,\text{arc tang}\,\frac{q}{p}\right)$$

(t. 386, p. 499) (Serret et Boncompagni).

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (l\,\text{tang}\,x)^3 \frac{x}{\sin 2x}\, dx = -\frac{5}{512}\,\pi^5$$

(t. 410, p. 529) (Euler).

Mêmes noms que dans la deuxième partie.

Le sommaire très-détaillé qui est au commencement du volume (p. 5 à 19) est une dichotomie analytique si bien faite, qu'on peut trouver tout de suite l'intégrale dont on a besoin et insérer de nouveaux résultats ; à cet effet, il est nécessaire de faire intercaler par le relieur des pages blanches.

On peut aussi recommander l'ouvrage aux professeurs enseignants. Ils y trouveront en profusion des exercices de quadratures à proposer aux élèves, aujourd'hui que les différentielles et les intégrales sont entrées dans nos écoles sous le masque de fonctions primes et primitives.

> . . . Licuit, semperque licebit
> Signatum præsente notâ producere nomen.
> (Horat., *Ars poetica.*)

Il est à désirer qu'on nous donne une collection semblable d'intégrales d'*équations* différentielles, classées par ordre, degré, nombre de variables, nombre d'équations ; de même pour les différences partielles et pour les différences finies. C'est aux grandes académies à encourager de tels travaux, en se chargeant des frais d'impression. Trois académies, Pétersbourg, Berlin, Amsterdam, sont entrées dans cette voie et ont bien mérité de la science.

---

Leçons sur la théorie des fonctions circulaires et la trigonométrie; par le P. *I.-L.-A. Le Cointe*, de la Compagnie de Jésus, professeur au collége Sainte-Marie, à Toulouse. Ouvrage destiné à la préparation aux Écoles du Gouvernement et spécialement à l'École Polytechnique. In-8 de 385 pages. Paris, chez Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55. Prix : 6 francs.

L'ouvrage du P. Le Cointe se présente au public sous le patronage éminent de M. le doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, qui en a fait un Rapport très-favorable à l'Académie des Sciences de cette ville (séance du 9 décembre 1858), et il n'est pas douteux que ces éloges seront ratifiés par tous ceux qui le liront avec l'attention qu'il mérite.

Nouveau par l'introduction d'un assez grand nombre de questions, cet ouvrage l'est encore par l'ordre adopté pour la distribution des matières. Comme un grand nombre de questions, appartenant à la théorie des fonctions circulaires, n'ont aucun rapport avec la trigonométrie, l'auteur a justement établi une démarcation absolue entre ces deux branches des sciences mathématiques.

La théorie des fonctions circulaires, qui fait le sujet de la première de ces deux grandes divisions du livre, comprend trois parties :

Dans la première partie, intitulée *Étude analytique et élémentaire des fonctions circulaires*, l'auteur considère comme des rapports les lignes trigonométriques (sinus, tangente, sécante, etc.), étudie les lois de leurs variations, établit les relations qui existent entre les rapports trigonométriques d'un même arc et celles qui concernent l'addition et la multiplication des arcs; fait connaître les limites de certaines fonctions circulaires simples ou composées, et se trouve ainsi conduit naturellement à exposer les principes de la construction des Tables trigonométriques. Le rayon est toujours désigné par R, le cercle par C et la demi-circonférence par H (*). Des exemples numériques bien choisis, parmi lesquels se présente la résolution de certaines équations transcendantes, servent d'application. Dans ces exemples, l'auteur s'attache toujours à rendre les formules propres au calcul logarithmique; c'est en effet une précaution qu'on prend généralement dans la pratique. Cependant elle n'est pas d'une nécessité absolue et quelquefois même elle occasionne une perte de temps. On pourrait donc désirer de trouver quelques exemples du calcul immédiat de formules non rendues logarithmiques, effectué néanmoins à l'aide des Tables de logarithmes qui sont seules en usage.

La seconde partie, intitulée *Étude analytique et complémentaire des fonctions circulaires*, traite des propriétés relatives à la sommation des suites limitées de certaines fonctions circulaires. On y trouve les formules de Moivre, de Jean Bernoulli et plusieurs autres dues à Euler et à Fuss.

L'auteur expose ensuite la résolution des équations binômes; un grand nombre de propriétés concernant les différentes valeurs des radicaux $\sqrt[m]{1}$ et $\sqrt[m]{-1}$, $m$ étant un nombre entier positif; la théorie des polygones réguliers

(*) Cette notation aurait pu être evitée pour prendre celle qui est en usage. Tm.

convexes et étoilés; la division de la circonférence en dix-sept parties égales, et plusieurs théorèmes relatifs à la multiplication des arcs. Cette seconde partie se termine par la résolution des équations algébriques du troisième degré.

La troisième partie est consacrée à une étude élémentaire et géométrique des fonctions circulaires. C'est dans cette partie que l'auteur a réuni les différentes propriétés géométriques qui sont le fondement de la trigonométrie rectiligne et de la trigonométrie sphérique.

Parmi les propriétés relatives à la division du cercle en parties égales, on trouve le théorème de *Moivre*, celui de *Cotes*, qui en est une conséquence, et plusieurs autres propositions intéressantes extraites du *Journal mathématique de Cambridge*. L'auteur donne (p. 264) une démonstration très-simple du théorème de *Lexell*, et termine cette troisième partie par un *appendice* où il a réuni plusieurs théorèmes qui ne se rattachent à la théorie des fonctions circulaires que par certaines démonstrations dont ils sont susceptibles.

La trigonométrie, réduite à ce qu'elle est essentiellement, savoir : la résolution des triangles, est traitée, dans le chapitre suivant, avec tous les développements qu'elle comporte. L'auteur a eu soin d'y ajouter quelques applications numériques qui indiqueront aux élèves l'ordre qu'il convient de suivre dans les calculs des formules trigonométriques.

Enfin, l'ouvrage se termine par une collection fort riche de questions, que l'auteur propose comme exercices, dont plusieurs sont nouvelles, et dont le choix sera très-apprécié des professeurs. Quelques-unes de ces questions sont extraites des *Nouvelles Annales de mathématiques*, des *Actes de Pétersbourg*, du *Journal de Crelle*, du *Bulletin de Férussac* et des ouvrages de *Delambre* et de *Puissant*.

En résumé, l'ouvrage du P. Le Cointe dénote chez son auteur une grande érudition et un talent exercé; c'est une mine féconde où pourront puiser abondamment tous ceux qui veulent approfondir l'étude de cette branche des sciences mathématiques, et MM. les Professeurs y trouveront, pour l'enseignement de leurs élèves, un grand nombre d'éléments réunis, qu'ils chercheraient vainement dans d'autres recueils. E. J.

*Note du Rédacteur.* Parmi les qualités de ce savant ouvrage, nous signalerons les notions historiques et les citations *in extenso* des sources : preuve d'érudition et aussi devoir de conscience. C'est l'ouvrage le plus complet sur les fonctions circulaires et sur les sommations de séries circulaires finies. Aux p. 100 à 106, on trouve des solutions d'équations transcendantes, si en vogue aujourd'hui, par exemple, le système d'équations

$$x + y + z = 180^\circ,$$

$$\frac{3}{17}\operatorname{tang} x = -\frac{1}{3}\operatorname{tang} y = -\frac{3}{2}\operatorname{tang} z;$$

les équations binômes sont traitées avec l'étendue que comporte le sujet. On donne l'inscription *géométrique* des huit polygones réguliers de dix-sept côtés (p. 186), avec figure intercalée.

Les deux trigonométries sont développées avec le même soin que les fonctions circulaires; les exercices numériques abondent; parmi les quatre-vingt-treize exercices qui terminent l'ouvrage, il y en a de curieux, de nouveaux et tous très-utiles; nous y puiserons quelquefois.

Il y a quelques démonstrations *puritaines*. Il est toujours convenable d'avoir confiance dans l'intelligence du lecteur.

Il aurait été à desirer que l'auteur, à l'instar de Cagnoli, eût indiqué les relations *différentielles* des éléments des triangles, *indispensables* pour les praticiens. La résolution trigonométrique de l'équation du 4$^e$ degré aurait dû suivre celle du 3$^e$ degré. En tête de tout ouvrage de mathématiques, on devrait trouver l'explication des *notations* employées par l'auteur. Cela faciliterait l'intelligence de la matière et économiserait le temps.

Nous croyons donner une idée exacte de cette production, en la définissant une Encyclopédie trigonométrique.

---

## SUR LA RECTIFICATION DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON;

PAR M. PROUHET.

---

La rectification de la méthode de Newton, ordinairement attribuée à Fourier, se trouve dans un ouvrage publié en 1770, sous ce titre : *Traité de la résolution des équations invariables;* par M. J.-R. Mouraille, de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Marseille. Paris et Toulouse, 1770; in-4° de XXXII — 446 pages, 17 planches.

L'auteur nomme *invariables* les équations algébriques, pour les distinguer des équations différentielles, dont il devait traiter dans un second volume qui n'a jamais paru. Il donne l'interprétation géométrique de la methode de Newton, et il examine dans le plus grand détail (p: 329 à 361, fig. 41 à 52) toutes les particularités que peut présenter une courbe du genre parabolique, dans les environs du point où elle rencontre l'axe des $x$. Il indique ensuite entre quelles limites la méthode de Newton est applicable; quels sont les cas où il faut partir d'une valeur approchée par défaut, et ceux où la première valeur substituée doit être approchée par excès.

La méthode de Newton consiste à réduire l'équation

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots = 0$$

à ses deux premiers termes. En conservant le troisième, aurait-on une valeur plus approchée? Quelques auteurs l'ont pensé; mais M. Mouraille fait voir qu'il n'en est pas toujours ainsi, et qu'on pourrait s'éloigner de la racine cherchée.

L'ouvrage de Mouraille paraît n'avoir point attiré l'attention des géomètres à l'époque où il a été publié, et il est tombé aujourd'hui dans un oubli complet, qu'il ne mérite pas cependant, d'après ce que nous venons de dire. Toutefois il est bon d'ajouter que c'est un peu la faute de l'auteur. Son style est diffus, ses démonstrations souvent peu rigoureuses, et il affiche, à propos de l'infini, une métaphysique capable d'effaroucher beaucoup de lecteurs. Ce mauvais voisinage a fait tort à quelques idées neuves et ingénieuses que renfermait le *Traité de la résolution des équations invariables*.

## GERGONNE.

Le fondateur du journalisme mathématique en France; le propagateur des doctrines dualistes, qui, perfectionnées et généralisées, ont doublé l'empire géométrique; le philosophe pénétrant qui, sur toute matière, a appliqué une dialectique serrée, d'une touche vigoureuse, d'une éloquence spirituellement colorée; le logicien sévère, inexorable, concis et ennemi de cette métaphysique verbeuse qui s'agite indéfiniment, sans jamais se lasser, parce qu'elle marche dans le vide, sans obstacle possible; le professeur pontife, élevant l'enseignement à la hauteur d'un sacerdoce, pour lequel la chaire est devenue l'autel de la vérité, proclamant comme but essentiel *la science*, et non pas seulement les intérêts matériels qu'imposent malheureusement les nécessités de la vie terrestre; l'administrateur intelligent, intègre, ayant le courage, plus rare que l'intrépidité militaire, le courage de résister aux séductions du pouvoir, de ne jamais faire plier le bon droit et la justice selon le bon plaisir des supérieurs, et de ne jamais préconiser, formuler un optimisme banal, conforme au système du jour : Gergonne n'existe plus. Nous essayerons d'esquisser une carrière qu'une Providence bienfaisante a rendue longue d'années, féconde en résultats. La multitude naît, grandit, respire, se nourrit, décline et meurt tout entière; celui-là seul a vécu, qui peut se présenter avec assurance devant le souverain juge d'en haut, et lui dire : J'ai rempli ta mission; *præcepta tua observavi;* celui-là seul a vécu, qui, animé du feu sacré, a voué ses jours et toutes ses facultés au perfectionnement de l'être moral que l'Écriture Sainte représente comme type de l'Esprit divin.

Nous attendons quelques renseignements pour tracer un tableau fidèle des travaux du géomètre, des mérites littéraires de l'écrivain, des talents du professeur, enfin du caractère de l'homme avec ses qualités et ses aspérités. *Sit terra ei levis.*

---

# SUR L'INVENTION DES EXPOSANTS FRACTIONNAIRES OU INCOMMENSURABLES;

PAR M. PROUHET.

Les exposants fractionnaires ont commencé à être en usage dans la seconde moitié du XVII^e siècle, et leur invention est ordinairement attribuée à Wallis. Cependant cette notation avait déjà été proposée, sinon employée, par Simon Stevin, qui, en faisant une découverte supérieure à son époque, et que lui-même regardait comme prématurée, s'est trouvé en avance de près d'un siècle sur le progrès naturel de la science. Nous disons progrès naturel, car la considération des exposants de nature quelconque ne pouvait être de quelque utilité qu'après la découverte des séries infinies et au moment où la représentation, due à Descartes, des grandeurs qui varient d'une manière continue, conduisait à introduire la continuité dans les symboles analytiques.

Il est arrivé trop souvent qu'en voyant dans un auteur le germe d'une découverte amenée plus tard à sa maturité, on lui en a attribué tout l'honneur. Une heureuse rencontre, dont le prix est ignoré de celui qui l'a faite, ne doit pas cependant être confondue avec une invention véritable. Pour montrer que Stevin a bien réellement inventé les exposants fractionnaires, et même, ce qui est plus remarquable encore, les exposants incommensurables, nous citerons ses propres paroles, après avoir donné quelques explications sur les notations qu'il emploie.

Stevin (*) désigne l'inconnue d'un problème par le

(*) L'ARITHMETIQUE DE SIMON STEVIN DE BRUGES contenant les computations des nombres Arithmetiques ou vulgaires : aussi l'Algebre, avec les signe (1), et les puissances de cette inconnue par (2), (3), etc. Le caractère (0) représente une grandeur connue, mais dont la valeur n'est pas assignée. Stevin nous apprend qu'il emprunte ces notations, (0) excepté, à Rafael Bombelli (*). Il les préfère, pour « leur convenable et naturel ordre », aux caractères bizarres employés par les algébristes de son temps (**) On voit que les chiffres écrits en cercle sont de véritables exposants. Stevin les appelle *dénominateurs* des dignités ou puissances.

Quand un problème renferme deux inconnues, la seconde est appelée une *quantité post-posée*, et désignée par sec (1); ses puissances sont représentées par sec (2), sec (3), etc. Une troisième inconnue sera représentée par ter (1), ter (2), etc., et ainsi de suite. Les six théorèmes empruntés par Albert Girard à Stevin, qui lui-même les avait pris à Cardan, et dont M. Terquem (***) déclare n'avoir pu trouver le sens, n'ayant pas l'ouvrage de Stevin sous les yeux, sont des théorèmes relatifs à l'élimination d'une inconnue entre deux équations.

---

équations de cinc quantitez ensemble les quatre premiers livres d'Algebre de Diophante d'Alexandrie maintenant premièrement traduicts en françois. Encore un livre particulier de la pratique d'Arithmetique contenant entre autres les tables d'interests, la disme et un traicté des incommensurables grandeurs : avec l'explication du dixiesme livre d'Euclide. A Leyde, de l'imprimerie de Christofle Plantin. CIƆ IƆ LXXXV. In-8 de xvi-656 pages, plus 214 pages pour l'appendice.

(*) *Histoire des Mathématiques en Italie*, t. III, p. 363. Les puissances de l'inconnue sont designées par $\underset{\smile}{1}$ $\underset{\smile}{2}$ etc.

(**) *Algèbre de Clavius*, Rome, 1608. Clavius s'excuse de ne pas employer les chiffres pour désigner les puissances, sur ce qu'il y aurait confusion entre ces chiffres et ceux qui representent des grandeurs. Le cercle de Stevin remédiait à cet inconvénient.

(***) Analyse de l'invention nouvelle en Algèbre, *Bulletin de Bibliographie, etc.*, t. I, p. 145.

(Extrait de l'Arithmétique de Stevin, p. 18.)

Que les dignitez ou denominateurs des quantitez *ne sont pas necessairement nombres entiers, mais potentiellement nombres rompuz et nombres radicaux quelconques.*

Il est assez notoire à ceux qui s'exercent en computations algebraiques (car c'est à eux que nous parlons ici), que quand il y a à extraire racine quarrée de (1), ou de (3), ou bien racine cubique de (2) et de semblables, qu'il faut dire, que c'est racine d'autant. Par exemple racine quarrée de 4 (1) se dit $\sqrt{4}$ (1), la raison est, qu'il n'y a en use aucunes algebraiques quantitez qui pourroient autrement signifier telles racines. Toutesfois le $\frac{1}{2}$ en circle seroit le charactere de racine de (1), parce que le mesme (suivant la reigle de multiplication des autres quantitez) multiplié en soi donne produict (1), et par conséquent $\frac{3}{2}$ en un circle serait le charactere de racine quarrée de (3), par ce que telle $\frac{3}{2}$ en circle multipliée en soi donne produict (3), et ainsi des autres; de sorte que par tel moien on pourroit de toutes simples quantitez extraire especes de racines quelconques, comme racine cubique de (2) serait $\frac{2}{3}$ en circle, etc.

Or par la consideration de ces choses nous est devenu manifeste ce qui au paravant nous estoit plus obscur, à sçavoir que la prime quantité, laquelle les algebraiciens usent pour l'inferieure ne l'est pas, consideré ce qui consiste potentiellement en eux : mais comme il y a un infini maieur progres des quantitez depuis l'unité, ou de la prime quantité en ascendant, comme (1) (2) (3), etc., ainsi il y a semblable infini moindre progres de la prime quântité en descendant, qui se pourroit signifier par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ en circles, et si pourroit on par les mesmes proceder comme par denominateurs entiers.

Or si l'usage de telles quantitez pouvoit avancer en la reigle de trois algebraique (vulgairement dicte equation) à sçavoir que par icelles un sceust venir au dessus des quantitez (4) (3) (2) (1) (0) de lois de Ferrare (*) (ce qu'avons tenté, mais combien qu'ainsi je pouvois extraire racines de toutes quantitez, toutefois n'y avons peu avenir, comme à son lieu en dirons plus amplement) certes leur usage seroit par raison à conceder (**). Mais n'estant cela pour l'heure pas ainsi, userons seulement les vulgaires entieres, d'autant plus que toutes computations se peuvent achever sans icelles. Car à la fin autant faisons par racine de 4 (1), comme par 2 mis devant $\frac{1}{2}$ en circle. Tellement que par ce discours avons voulu manifester ce qui consiste potentiellement en la matiere, à fin que par ainsi rendissions le subject plus notoire. Il pourroit aussi avenir que ceste souvenance causeroit à un autre quelque avancement

On voit que Stevin concevait très-nettement les exposants des puissances comme formant deux suites infinies, partant de l'unité et comprenant tous les nombres, entiers, fractionnaires, incommensurables (nombres radi-

---

(*) C'est-a-dire aller au delà de la resolution des equations du quatrième degre donnee par Louis Ferrari.

(**) La notation de Stevin a ete adoptee par son disciple Albert Girard Voyez l'article deja cite de M. Terquem, p. 137.

caux quelconques). C'est là une idée bien remarquable, et qui doit faire considérer le géomètre de Bruges comme un des principaux promoteurs de l'algèbre (*).

## NOTE

### Historique supplémentaire sur le calcul de $\pi$

(voir t. XIV, p. 210)

*Ouvrages où l'on trouve ces calculs.*

— 250. Archimède. — *De dimensione circuli.*

1464. Regiomontanus. — *De quadratura circuli adversus Nic. de Cusa* (calculé avec 3 décimales).

1586. Rheticus. — *Canon doctrinæ triangulorum.*

1597. Adrien Metius. — *Manuale geometriæ practicæ.* Lug.-Batav.

1579. Viete. — *Canon mathematicus.* Parisiis.

1597. Adrian Romanus. — *In Archimedis circul. dimens.* Wurceburgi (112 pages).

1615. Ludovic van Ceulen. — *De circulo et adscriptis.* Edit. Snellio. Ludg.-Batav.

7621. Will. Snellius. — *Cyclometricus de circ. dimensione* (calculé avec 34 décimales).

1717. Abr. Sharp. — *Philomath. geometry improved.* London.

(*) Klugel, *Mathematische Worterbuch*, art. *Algebra,* attribue même les exposants négatifs à Stevin. C'est probablement une faute d'impression, puisqu'à l'article *Potenz* on ne parle que des exposants fractionnaires, comme dus à cet auteur.

1706. Machin. — *Jones's synopsis Palmariorum matheseos, or a new introduction to the mathematics.* London, in-8.

1719. De Lagny. — *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, p. 155.

1790. De Vega. — *N. Act. Peters.*, t. IX, Hist., p. 41.

1842. Rutherford. — *Phil. Trans.*, 1841, P. 2, p. 283.

..... Anonyme. *Manuscrit de la bibliothèque Radcliffe à Oxford.*

1844. Dahse. — *Journal de Crelle*, t. XXVII, p. 198

..... Clausen. — *Astron. Nachr.*, n° 184.

1853. Shanks. — *Proceedings, R. Society*, jan. 20, p. 273.

1853. Richter. — *Grunert Archiv.*, t. XXI, p. 119.

1854. Richter. — *Grunert Archiv.*, t. XXII, p. 473, et t. XXIII, p. 476.

1853. Rutherford. — *Proceedings, R. Society*, jan. 20. p. 273.

1855. Richter. — *Grunert Archiv.*, t. XXV, p. 472.

1853. Shanks. — *Proceedings, R. Society*, jan. 20, p. 273.

(Extrait de l'ouvrage : *Tables d'intégrales*, par Bierens de Hann.)

Abr. Sharp, né en 1651, à Little-Horton (Yorkshire), près Bradford, d'une famille considérée, fut placé comme apprenti chez un marchand de Manchester, mais il abandonna bientôt le commerce pour se livrer aux sciences.

exactes, et établit une école à Liverpool. Il entra ensuite comme teneur de livres chez un négociant uniquement pour être près de Flamsteed qui demeurait alors chez ce négociant; de là une liaison qui ne finit qu'avec la mort du célèbre astronome. Nommé en 1688 *assistent* à l'observatoire de Greenwich, il se livra à des travaux qui minèrent sa santé et l'obligèrent à retourner à Horton au foyer natal. Il y érigea un observatoire et le munit de nombreux instruments, œuvres de ses mains. En 1718, il publia, format in-4, sous le nom de A. S. (lettres initiales) : *Philomath. geometry improved 1° by a large and accurate table of segments of circles; 2° a concis treatise of Polyedra.*

Les logarithmes de 1 à 100, ensuite les nombres premiers de 101 à 1100 et les vingt nombres compris entre 999990 et 1000010 y sont calculés avec 61 décimales. Les planches, très-belles, ont été dessinées et gravées par lui-même. On conserve aux archives de la Société Royale ses tables de sinus, tangentes ou sécantes, calculées pour chaque seconde de la première minute, et aussi remarquables par leurs qualités calligraphiques.

Le polyèdres réguliers et semi-réguliers sont traités avec beaucoup de développements, encore intéressants de nos jours.

C'est en 1699 qu'il calcula $\pi$, comme objet d'amusement, avec 72 décimales.

Cette extrême faculté calculatrice le mit en correspondance avec Flamsteed, Newton, Halley, Wallis, Hodgson, Sherwin et autres savants du temps. Ces lettres, que la famille possède encore, sont d'autant plus intéressantes, que Sharp écrivait en marge le contenu de ses réponses.

Il menait une vie fort singulière, très-retirée, presque solitaire et ne s'est pas marié. Dans sa maison cinq chambres étaient destinées à ses occupations scientifiques, et il n'était permis même à aucun de ses parents d'y mettre le pied; en fait d'étrangers, un certain mathématicien et un certain pharmacien de l'endroit étaient seuls admis. Quand il voulait les voir, frottant avec une pierre un certain endroit de la façade de sa maison c'était le signal. Chaque dimanche, il allait régulièrement à la chapelle des *Dissenters* à Bradford et tenant une main remplie de demi-pences derrière le dos, les pauvres, sans demander, sans être vus, venaient y puiser. Il observait peu d'ordre dans ses repas. Dans sa chambre de travail, on avait pratiqué une petite ouverture munie d'une tablette mobile, sur laquelle le domestique plaçait son dîner, toujours sans parler, et souvent le soir, le domestique remportait le dîner sans que Sharp y eût touché, ne voulant pas interrompre un travail commencé. Malgré ce régime et avec une santé débile, il atteignit l'âge de 91 ans et mourut le 18 juillet 1742. Il est le grand-oncle du célèbre artiste Ramsden.

Nouvel argument en faveur de la théorie *macrobiotique* de Cornaro et de M. Flourens. Le travail intellectuel, loin de nuire, contribue à la longévité; mais avec la condition *indispensable* de la *sobriété en toutes choses*. Sinon, non. On allonge aussi la vie, en adoptant la maxime de Leibnitz :

*Pars vitæ, quoties hora perditur, perit.*

## LETTRE AUTOGRAPHE DE LEGENDRE.

M. Asher, libraire à Berlin, possède des autographes de tous les géomètres qui ont été en relation avec Crelle, rédacteur de l'immortel journal, c'est-à-dire des *Dii majores* de notre époque. La lettre suivante, signée de notre illustre analyste, montre que le feu sacré resta chez lui allumé même sous les glaces de l'âge.

« Je vais dans quelques jours entrer dans ma quatre-vingtième année ; j'ai déjà vécu près de deux ans de plus que M. de Lagrange qui n'a vécu que soixante-dix-sept ans et soixante-dix-sept jours, et d'un an de plus que M. de Laplace qui a vécu soixante-dix-huit ans moins dix-huit jours ; je dois donc compter un à un les jours qu'il plaira à Dieu de m'accorder, et je n'ai pas un moment à perdre pour achever la tâche que j'ai entreprise dans la vue de compléter par un dernier effort mes travaux sur les fonctions elliptiques et sur les transcendantes analogues.... C'est en effet la gloire de M. Abel que je mettrai dans tout son jour, en faisant voir que son théorème généralise à l'infini tous ceux que l'immortel Euler avait découverts sur les fonctions elliptiques. Une nouvelle branche d'analyse, bien plus vaste que celle des fonctions elliptiques, est ouverte par ce théorème admirable. »

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fermat | est mort âgé de | 70 | ans. |
| Leibnitz | » | 70 | |
| Euler | » | 76 | |
| Lagrange | » | 77 | |
| Laplace | » | 78 | |
| Gauss | » | 78 | |
| Legendre | » | 82 | |
| Newton | » | 85 | |
| Gergonne | » | 88 | |
| Humboldt (A. de) | » | 91 | |

Lorsqu'un esprit de haut bord a une fin prématurée, informez-vous du *vitæ curriculum*, et très-souvent vous aurez le mot de l'énigme. Adam a été puni pour avoir voulu cumuler les délices d'Éden et ceux de la science. Il faut opter.

## BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(voir p. 17).

(T. LVI, 3e cahier, pages 191 à 283.)

### *Analyse algébrique.*

OTTO HESSE (*) (p. 263 à 369). *Sur les théorèmes des fonctions homogènes entières.*

THÉORÈME. *Si le déterminant* (Hessien) *d'une fonction* homogène entière *de* n *variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *s'évanouit* identiquement, *alors, en remplaçant les* x *par des fonctions linéaires en* y, *de la forme*

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + a_3^\varkappa y_3 + \ldots a_n^\varkappa y_n,$$

*on peut trouver pour les constantes* a *des valeurs telles, qu'une des* n *variables* y *disparaisse; les* $\varkappa$ *sont des indices.*

Ce théorème, déjà communiqué par l'auteur, t. XLII, p. 119 (Crelle), 1851, est démontré ici d'une manière plus rigoureuse.

Soit $u$ la fonction, on a pour déterminant (Hessien)

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \ldots\ldots u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} \ldots\ldots u_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_{n1} & \ldots\ldots\ldots u_{nn} \end{vmatrix} = \Delta:$$

(*) Prononcez la voyelle finale *e*, mais comme *e* dans *ornementation*.

$u_{\varkappa\lambda}$ est la dérivée successive de $u$ par rapport à $x_\varkappa$ et $x_\lambda$; et on suppose $\Delta = 0$ *identiquement*. Soit $u_{\varkappa\lambda}$ un des termes de ce déterminant, on a encore ce théorème :

*Si, outre l'équation identique* $\Delta = 0$, *on a encore* $\dfrac{d\Delta}{du_{\varkappa\lambda}} = 0$ *identiquement, $\varkappa$ et $\lambda$ ayant une valeur déterminée, tous les autres coefficients différentiels de* $\Delta$ *par rapport à un de ses termes sont identiquement nuls.*

Autre théorème :

*Si* $\Delta = 0$ *identiquement, on peut toujours déterminer* n *constantes* a *telles, que l'on ait*

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = 0.$$

Toutes ces démonstrations sont déduites de ces identités connues

$$\Delta = \Delta_{\chi_1} u_{\gamma_1} + \Delta_{\gamma_2} u_{\gamma_2} + \ldots + \Delta_{\gamma_n} u_{\lambda_n},$$

$$0 = \Delta_{\gamma_1} u_{\lambda_1} + \Delta_{\gamma_2} u_{\lambda_2} + \ldots + \Delta_{\gamma_n} u_{\lambda_n},$$

$$\Delta_{\gamma\rho} = \frac{d\Delta}{du_{\gamma\rho}}.$$

## *Arithmologie.*

E.-E. Kummer (p. 270 à 279). *Sur les propositions complémentaires aux lois générales de réciprocité.*

C'est la suite d'un Mémoire inséré t. XLIV, p. 93. On en rendra compte simultanément.

## *Géométrie.*

F. Joachimsthal, à Breslau (p. 280 à 284). *Sur un théorème de la Géométrie analytique élémentaire.*

1. Théorème I. u, v *sont les deux distances d'un point* O *à deux droites* M *et* N; $f(u, v) = 0$ *l'équation*

*d'une ligne, si l'on porte respectivement sur* u *et sur* v *des longueurs (ayant égard aux signes) proportionnelles* $\frac{df}{du}$ et $\frac{df}{dv}$, *la diagonale du parallélogramme construit sur ces côtés est la normale en* O *de la courbe* $f(u, v) = 0$.

Théorème II. u, v *les deux distances respectives du point* O *à deux points fixes* m *et* n; *et* $f(u, v) = 0$ *équation d'une ligne; même construction et même conclusion.*

Théorème III. u *distance du point* O *au point* m; v *distance du point* O *à la droite* M; $f(u, v) = 0$ *équation d'une ligne; même construction et même conclusion.*

La démonstration repose intuitivement sur des principes de statique et aussi sur le calcul, en passant de chacun des trois systèmes de coordonnées à un système de coordonnées rectangulaires. Dans chacun l'équation de la normale est

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}} = \frac{Y - y}{\frac{df}{du}\frac{du}{dy} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dy}}:$$

mais aussi dans chacun des trois systèmes

$$\frac{du}{dx} = -\cos(u, x), \quad \frac{du}{dy} = -\cos(u, y);$$

$$\frac{dv}{dx} = \cos(v, x), \quad \frac{dv}{dy} = \cos(v, y);$$

donc l'équation de la normale devient

$$\frac{X - x}{\frac{df}{du}\cos(u, x) + \frac{df}{dv}\cos(v, x)} = \frac{Y - y}{\frac{df}{du}\cos(u, y) + \frac{df}{dv}\cos(v, y)},$$

ce qui fournit l'énoncé du théorème.

La généralisation du théorème dépend de l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 1.$$

**2.** Soient donnés dans le même plan une courbe et quatre points fixes A, B, $a$, $b$; O étant un point de la courbe, construisons un triangle $oab$, tel qu'on ait

$$oa = \mathrm{OA}, \quad ob = \mathrm{OB};$$

les points $o$ seront sur une seconde courbe; menons par O une normale NON à la première courbe, et par $o$ une normale $on$ à la seconde courbe; on aura

$$\frac{\sin \mathrm{AON}}{\sin \mathrm{BON}} = \frac{\sin aon}{\sin bon};$$

car l'équation de la normale est indépendante des deux points fixes (§ 1); même conclusion lorsqu'on prend deux droites fixes ou bien un point et une droite fixe.

3. L'équation

$$f(u, v) = 0$$

représente trois courbes différentes dans les trois systèmes des coordonnées; si O est un point commun à deux de ces systèmes, et si ces coordonnées $u$, $v$ sont *identiques* dans les deux systèmes, les deux courbes auront au point O mêmes normales, et par conséquent mêmes tangentes. Voici quelques applications de ce théorème.

4. Soient AM, AN deux droites fixes; O$m$ ($u$), O$n$ ($v$) deux perpendiculaires abaissées du point O sur les droites AM, AN; si l'on a l'équation

$$u - \alpha v = 0,$$

alors :

1°. Dans le premier système des coordonnées, cette équation est celle de la droite OA.

2°. Dans le troisième système, $m$ étant un point fixe, cette équation est celle d'une conique ayant $m$ pour foyer et AN pour directrice; la droite OA est alors tangente à la conique; par conséquent, les tangentes menées par les extrémités d'une droite focale rencontrent les directrices au même point A, et la droite qui joint ce point A au foyer est perpendiculaire sur la corde focale.

3°. Dans le second système (th. II), $m$ et $n$ étant des points fixes, l'équation

$$u - \alpha v = 0$$

est celle d'un cercle passant par O et par les points où les bissectrices de l'angle $mOn$ et de son supplément rencontrent la droite $mn$; et OA est une tangente au cercle.

5. Si dans les figures précédentes on a

$$Om.On = \beta,$$

alors, dans le premier système, cette équation est celle d'une hyperbole ayant OM, ON pour asymptotes. Dans le deuxième système, $m$ et $n$ étant des points fixes, cette équation est celle d'une lemniscate touchant l'hyperbole en O. Or O est le milieu de la partie de la tangente à l'hyperbole interceptée entre les deux asymptotes M et N; donc la même propriété a lieu pour la lemniscate. De semblables constructions et théorèmes ont lieu pour toutes les courbes qui sont représentées dans les trois systèmes par l'équation

$$(u - \alpha)(u - \beta) = v.$$

6. Soient A le centre d'une conique; M et N deux diamètres conjugués $2\sqrt{\alpha}$ et $2\sqrt{\beta}$. L'équation

$$(a) \qquad \frac{u^2}{\beta} + \frac{v^2}{\alpha} = \sin^2(M, N)$$

représente l'équation de cette conique dans le premier système; si $m$ et $n$ sont considérés comme points fixes, la même équation représente, dans le deuxième système, un cercle qui a pour centre le centre de gravité de deux poids proportionnels $\alpha$ et $\beta$ placés respectivement en $m$ et en $n$; mais, la conique et le cercle se touchant en O, on a donc ce théorème :

*Si du point* O *d'une conique on abaisse des perpendiculaires* O$m$, O$n$ *sur deux diamètres conjugués* $2\sqrt{\alpha}$, $2\sqrt{\beta}$, *la normale en* O *rencontre la droite* mn *en un point qui est le centre de gravité de deux poids* $\alpha$ *et* $\beta$ *placés en* m *et* n.

Dans le cercle, cette normale passe par le milieu de $mn$, et dans l'hyperbole équilatère la normale est parallèle à $mn$.

Un théorème analogue a lieu pour les surfaces du second ordre; alors il faut placer aux pieds des perpendiculaires comme poids proportionnels les carrés des aires des parallélogrammes formés par les deux diamètres conjugués qui sont dans le plan sur lequel on a abaissé les perpendiculaires.

O. Hermes (p. 204 à 217). *Extension des propriétés du quadrilatère plan aux tétraèdres, pentaèdres et hexaèdres.*

Démontré à l'aide des coordonnées trilitères et quadrilitères.

On donnera ces propriétés dans le journal.

O. Hermes (p. 218 à 246). *Sur des tétraèdres homologues.*

Extension du théorème Poncelet; sera donné dans le journal.

## *Calcul infinitésimal.*

Lipschitz (R.), de Bonn (p. 189 à 196). *Sur l'intégrale de l'équation différentielle* $\frac{d^2I}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dI}{dx} + I = 0$.

On rencontre cette équation dans le mouvement de la chaleur dans un cylindre infini. Elle a été étudiée par Fourier, *Théorie analytique de la Chaleur*, ch. VI, p. 369;

Poisson, *Journal de l'École Polytechnique*, cah. XIX, p. 349.

Bessel, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1825. (Recherche sur la partie des perturbations planétaires dépendant des mouvements du Soleil.)

On possède une intégrale *particulière*, représentée par la série infinie convergente

$$I(x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{x^2}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2.4.6}\right)^3 + \ldots,$$

et encore par l'intégrale définie

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Poisson démontre que pour des valeurs croissantes de $x$ la fonction $I(x)$ s'approche de plus en plus de

$$\frac{1}{\pi}\frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{x}},$$

et donne pour des valeurs très-grandes de $x$ une série semi-convergente.

Le but du Mémoire de M. Lipschitz est de montrer de nouvelles relations entre la fonction $I(x)$ et les fonctions trigonométriques, et de donner une nouvelle série semi-convergente.

Ainsi il trouve

$$\int_0^\infty e^{-bx}\,\mathrm{I}(ax)\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2+a^2}} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \mathrm{I}(ax)\,dx = \frac{1}{a},$$

équation analogue à celle-ci :

$$\int_0^\infty e^{-bx}(\cos ax + i\sin ax)\,dx = \frac{b+ai}{b^2+a^2},$$

et

$$\int_0^\infty x^{m-1}\,\mathrm{I}(ax)\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma\frac{1}{2}(m-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\sin m\pi\,\frac{1}{a^m},$$

analogue à celle-ci :

$$\int_0^\infty x^{m-1}(\cos ax + i\sin ax)\,dx = \frac{\Gamma(m)}{a^m}\left(\cos\frac{m\pi}{2} + i\sin\frac{m\pi}{2}\right),$$

ou

$$0 < m < 1.$$

Les séries semi-convergentes se déduisent de ces théorèmes, et l'auteur fait usage de la construction géométrique des quantités complexes $x + iy$.

O. Röthig (p. 197 à 203). *Sur quelques espèces d'intégrales elliptiques.*

1. Soit

$$(1) \qquad \int \frac{f(x)\,dx}{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^{\frac{m}{3}}};$$

$f(x)$ fonction rationnelle.

Au cas où $m = 1$ ou $m = 2$, Legendre a examiné quelques cas particuliers (*Fonctions elliptiques*, ch. XXVII, XXVIII et XXXII); de même MM. Mindig et Richelot (Journal de Crelle, t. IX, p. 295 à 407); M. Röthig par diverses transformations ramène pour $m$ quelconque l'intégrale à la fonction elliptique

$$\int \frac{f(v)\,dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-c^2v^2)}}; \quad c = \frac{1}{2}\sqrt{2+\varepsilon\sqrt{3}}; \quad \varepsilon = \pm 1.$$

2. Soit

$$(2) \qquad \int \frac{f(x)\,dx}{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)^{\frac{m}{4}}},$$

$f(x)$ fonction rationnelle.

Legendre discute quelques cas spéciaux lorsque $m = 1$ et $m = 3$ (*Fonctions elliptiques*, ch. XXXII); M. Röthig ramène l'intégrale pour le cas général à la fonction elliptique

$$\int \frac{f(v)\,dv}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}v^2}},$$

et aussi dans les deux cas lorsque $a_3 = 0$.

---

## SUR LE THÉORÈME DE TINSEAU;

PAR M. PROUHET.

Ce théorème consiste en ce que le carré d'une aire plane est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires coordonnés. On le trouve pour la première fois dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1774 et imprimé en 1780 dans le tome IX des *Savants étrangers*, Mémoire dont l'auteur est Tinseau, correspondant de l'Académie, officier au corps royal du génie.

On déduit du théorème de Tinseau que le carré de la face hypoténuse d'un tétraèdre trirectangle est égal à la somme des carrés des trois autres faces. Ce corollaire est démontré directement dans les Mémoires de 1783, par de Gua, qui assure avoir communiqué cette proposition à l'Académie plus de vingt ans avant la présentation du théorème de Tinseau. Rien ne porte à soupçonner la bonne foi de de Gua, mais on doit remarquer que sa réclamation porte sur le corollaire et non sur le théorème principal auquel il ne paraît pas avoir songé : ensuite, que les séances de l'Académie n'étant pas publiques à cette époque, l'honneur de la découverte doit demeurer tout entier à Tinseau, qui ne pouvait pas avoir connaissance du travail de de Gua.

Un fait curieux et qui mérite d'être signalé, c'est que Descartes connaissait le théorème cité plus haut et relatif au tétraèdre trirectangle. L'illustre philosophe avait rencontré ce théorème et plusieurs autres, en composant une sorte de tétraédrométrie dont quelques fragments, restés inédits jusqu'à ce jour, viennent d'être publiés par M. Foucher de Careil. *Voir* les *Œuvres inédites de Descartes*, Paris, 1859, in-8, ouvrage intéressant et sur lequel nous reviendrons.

*Note du Rédacteur.* Tinseau de Gennes (Charles-Marie-Thérèse), sorti de l'école de Mézières en 1771, s'est retiré du service en 1791 ; il était de Besançon. Son fils, élève de l'École Polytechnique, a servi aussi dans le génie. Retiré en 1815 pour opinion politique. (*Voir* l'article du père dans la Biographie Michaud.) Une branche de cette famille habite Metz.

Gudermann a étendu le théorème pythagoricien au triangle sphérique (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 409, 1852).

## NOTE
### Sur plusieurs écrits relatifs au comte Jacques Riccati;

PAR LE PRINCE BALD. BONCOMPAGNI.

---

Dans le volume intitulé : *Memorie per servire all' istoria letteraria, tomo III, parte V, per il mese di maggio* 1754. *In Venezia, appresso Pietro Valvasense,* MDCCLIV. *Con licenza de' superiori e privilegio*. P. 33 36, art. xx, on lit une lettre en date de *Trivigi*, 11 *maggio* 1754, dans laquelle on trouve : 1° (p. 33-41) des renseignements sur la vie du comte Jacopo Riccati ; 2° (p. 41-43) un catalogue des ouvrages manuscrits du comte Jacopo Riccati ; 3° (p. 43 et 44) un catalogue de ses ouvrages latins ; 4° (p. 44-46) un catalogue de ses ouvrages en langue italienne imprimés.

Ce volume fait partie d'un recueil intitulé : *Memorie per servire all' istoria letteraria. In Venezia, appresso Pietro Valvasense*. MDCCLIII-MDCCLVIII. Ce recueil est composé de 12 tomes in-8°, dont les huit premiers sont divisés chacun en six parties.

Dans le volume intitulé : *Storia letteraria d'Italia sotto la protezione del serenissimo Francesco III, duca di Modena, ec., ec., volume IX. Dal Gennajo* MDCCLVI, *a tutto jiugno dell' anno medesimo. In Modena*, MDCCLVI. *A spese Remondini. Con licenza de' superiori e privilegio*. P. 513, lig. 10 ; p. 518, lig. 40 ; libro III, capo V, § VI-IX, on trouve un éloge du comte Jacopo Riccati.

Dans le même volume (p. 519, lig. 1 ; p. 523, lig. 8) on trouve un catalogue des ouvrages inédits et imprimés du comte Jacopo Riccati.

Ce volume est le neuvième volume d'un ouvrage anonyme du Père François-Antoine Zaccaria, de la Compagnie de Jésus, intitulé : *Storia letteraria d'Italia. In Venezia. — In Modena* MDCCL-MDCCLVI. En 9 volumes in-8°.

Dans le volume intitulé : *Nuovo Dizionario Istorico, ovvero Storia in compendio di tutti gli uomini che si sono resi illustri, ec., dal principio del mondo fino ai nostri giorni, con tavole cronologiche; composto da una Società di letterati in Francia, accresciuto in occasione di più edizioni da altre Società letterarie in Alemagna, ne' Paesi-Bassi, e Italia. Sulla settima edizione francese del* 1789, *tradotto in italiano. Tomo XVII. Bassano,* MDCCXCVI. *A spese Remondini di Venezia. Con licenza de' superiori e privilegio.* P. 14, col. 1, lig. 14; p. 15, col. 1, lig. 26; on trouve un article sur le comte Jacopo Riccati, qui commence : « I. RICCATI (conte *Jacopo*), » et finit : « (*ved.* RAMPINELLI P. D. *Ramiro*). »

Ce volume est le XVII^e d'une édition en 22 volumes in-8°, intitulée : *Nuovo Dizionario Istorico, ovvero Storia in compendio di tutti gli uomini che si sono resi illustri, ec., dal principio del mondo fino ai nostri giorni, con tavole cronologiche; composto da una Società di letterati in Francia, accresciuto in occasione di più edizioni di altre Società letterarie in Alemagna, ne' Paesi-Bassi, e in Italia. Sulla settima edizione francese del* 1789, *tradotto in italiano. Bassano,* MDCCXCVI. *A spese Remondini di Venezia. Con licenza de' superiori e privilegio.*

Dans le volume intitulé : *Vitæ Italorum doctrina excellentium qui sæculis* XVII *et* XVIII *floruerunt. Volumen XVI, auctore Angelo Fabronio, Academiæ Pisanæ curatore. Pisis* MDCXCV. *Apud Alexandrum Landi, superioribus annuentibus.* P. 336-392, on trouve un article intitulé : « DE TRIBUS RICCATIS (JACOBO » PATRE, VINCENTIO et JORDANO FILIIS). » Dans les p. 330, lig. 4, — 335, lig. 3, de ce volume, on trouve la vie du comte Jacopo Riccati.

Ce volume est le XVI$^{e}$ d'un recueil en 20 volumes in-8°, intitulé : *Vitæ Italorum doctrina excellentium qui sæculis* XVII *et* XVIII *floruerunt. Auctore Angelo Fabronio, Academiæ Pisanæ curatore. Pisis* MDCCLXXVIII, *Lucæ* MDCCCX.

Dans le volume intitulé : *Storia della Letteratura italiana nel secolo* XVIII, *scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di sua Altezza Reale il sig. Duca di Modena, socio e secretario della Società italiana delle Scienze. Tomo I, Modena, presso la tipografia camerale*, MDCCCXXVII. P. 366, lig. 29, p. 368, lig. 12; libro II, capo II, § LII), on trouve des renseignements sur la vie et les écrits du comte Jacopo Riccati.

Ce volume est le I$^{er}$ d'une édition intitulée : *Storia della Letteratura italiana nel secolo XVIII, scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di sua Altezza Reale il sig. Duca di Modena, socio e segretario della Società italiana delle Scienze. Modena, presso la tipografia camerale*, MDCCCXXVI-MDCCCXXX. Quatre volumes in-8°.

Ces mêmes renseignements se trouvent dans le volume intitulé : *Storia della Letteratura italiana nel secolo XVIII, scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di S. A. R. il Duca di Modena, socio e segretario della Società italiana delle Scienze. Tomo II. In Venezia, co' tipi di Francesco Andreola.* 1832.

Ce volume est le second de l'édition intitulée : *Storia della Letteratura italiana nel secolo XVIII, scritta da Antonio Lombardi, primo bibliotecario di S. A. R. il*

*Duca di Modena, socio e segretario della Società italiana delle Scienze. In Venezia, co' tipi di Francesco Andreola.* 1832. Six tomes in-12.

Dans chacun des écrits cités ci-dessus, on lit que le comte Jacopo Riccati est né à Venise le 28 mai 1676, et mort à Trévise (*Trevigi*) le 15 avril de l'année 1784.

Dans le volume intitulé : *Bibliographie biographique universelle. Dictionnaire des ouvrages relatifs à l'histoire de la vie publique et privée des personnages célèbres de tous les temps et de toutes les nations, depuis le commencement du monde jusqu'à nos jours. Enrichi du répertoire des bio-bibliographies générales, nationales et spéciales. Par Édouard-Marie OEttinger. Tome II,* N — Z (27391-45666). *Bruxelles. J.-J. Stienon, imprimeur-éditeur, faubourg de Louvain,* 19.1854 (col. 1520), on lit :

« Riccati (il conte *Jacopo*),
» naturaliste italien (28 mai 1676-15 avril 1754).»

« Marzari (*Giovanni-Battista*). Elogio del conte J. Riccati.
» *Trevis.* 1813.4. »

Je n'ai pas vu cet éloge du comte Jacopo Riccati.

*Note du Rédacteur.* Le célèbre bibliographe-géomètre a publié, en 1857 : 1° le *Liber abbaci di Leonardo Pisano,* in-4° de 457 pages; 2° *Scritti inediti del P. D. Pietro Cossali,* in-4° de 417 pages. Nous espérons entretenir nos lecteurs de ces importantes productions de l'érudition italienne, et je saisis avec empressement l'occasion d'offrir à la Providence des remercîments d'avoir prolongé assez ma carrière pour voir *poindre* le jour si longtemps désiré, le jour d'affranchissement de la patrie de Dante, Galilée, Volta, *scientiarum litterarumque* ΠΟΤΝΙΑ ΜΗΤΗΡ.

# SUR LE SYSTÈME DES COORDONNÉES TRILITÈRES ET QUADRILITÈRES.

1. Les fonctions *homogènes* jouissent de propriétés qui facilitent les calculs, et en outre sont de formation symétrique et mnémonique; le système de coordonnées à trois et quatre lettres a l'avantage de rendre les fonctions homogènes : de là l'usage qu'en font beaucoup de géomètres, surtout hors de France, usage qui deviendra général. On en voit une belle application dans le Mémoire de M. Painvin sur les surfaces du second ordre.

## *Coordonnées trilitères.*

2. Soit un triangle plan ABC; désignons par $t$, $u$, $v$ les distances respectives d'un point situé dans le plan du triangle, aux côtés BC, CA, AB. Ce point est *déterminé* lorsqu'on donne les rapports de deux de ces trois quantités à la deuxième, par exemple les rapports $\frac{t}{v}$, $\frac{u}{v}$, et l'on dit en ce sens que les trois coordonnées du point sont $t$, $u$, $v$.

$\varphi$ désignant une fonction connue, $\varphi(t, u, v) = 0$ représente l'équation d'une ligne plane, et la fonction doit être *homogène*, puisqu'elle établit une relation entre les rapports $\frac{t}{v}$, $\frac{u}{v}$.

Les Anglais nomment le triangle des trois axes, le triangle de *référence*, parce qu'on y rapporte les distances des points du plan.

*Équation d'une droite.* $at + bu + cv = 0$ est l'équation d'une droite; $a$, $b$, $c$ sont des constantes.

*Deux droites.* Le système de deux droites

$$at + bu + cv = 0,$$
$$a_1 t + b_1 u + c_1 v = 0,$$

représente l'équation d'un point, et l'on a

$$t = (bc_1), \quad u = (ca_1), \quad v = (ab_1).$$

3. *Trois droites.*

$$at + bu + cv = 0,$$
$$a_1 t + b_1 u + c_1 v = 0,$$
$$a_2 t + b_2 u + c_2 v = 0;$$

pour que ces trois droites passent par le même point, on doit avoir le déterminant

$$(ab_1 c_2) = 0.$$

4. *Droites passant par les sommets du triangle* ABC.

$at + cv = 0$, équation d'une droite passant par le sommet B,
$bu + cv = 0$, » A,
$at + bu = 0$, » C.

5. *Trois droites passant par les sommets et par le même point.*

$at + cv = 0$, droite passant par B,
$b_1 u + c_1 v = 0$, » A,
$a_2 t + b_2 u = 0$, » C;

lorsqu'on a la relation

$$ac_1 b_2 + cb_1 a_2 = 0,$$

les trois droites passent par le même point;

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{c_1}{b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = -1,$$

relation segmentaire.

6. *Transversale.* Soit

$$at + bu + cv = 0,$$

équation d'une transversale; on a

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = 1,$$

relation segmentaire.

7. *Relation harmonique.* Les quatre droites

$$t = 0, \quad at + bu = 0, \quad at - bu = 0, \quad u = 0,$$

forment un faisceau harmonique dont le sommet est C.

8. *Pôle d'une droite relativement à un triangle.* Soit, comme ci-dessus, le triangle de référence ABC; $au + bt + cv = 0$ l'équation d'une transversale.

$$t = 0, \quad at + bu = 0, \quad at - bu = 0, \quad u = 0,$$

forment un faisceau harmonique passant par C;

$$t = 0, \quad at + cv = 0, \quad at - cv = 0, \quad v = 0,$$

forment un faisceau harmonique passant par B;

$$u = 0, \quad bu + cv = 0, \quad bu - cv = 0, \quad v = 0,$$

forment un faisceau harmonique passant par A.

Les trois droites

$$at - bu = 0, \quad at - cv = 0, \quad bu - cv = 0$$

passent par le même point P (n° 5); ce point P est dit le *pôle* de la transversale relativement au triangle. En considérant le triangle comme une ligne du troisième ordre, le point P est le pôle de la droite, d'après la théorie générale des pôles et polaires de Bobillier.

Le centre de gravité du triangle est le pôle d'une droite située à l'infini.

Les centres des cercles qui touchent les côtés du triangle sont les pôles des quatre droites

$$t \pm u \pm v = 0.$$

O étant le centre du cercle circonscrit, la polaire de ce centre P est

$$t \sin \mathrm{OBC} + u \sin \mathrm{OCA} + v \sin \mathrm{OAB} = 0;$$

$$\mathrm{OBC} + \mathrm{OCA} + \mathrm{OAB} = \frac{\pi}{2}.$$

9. *Droites conjuguées dans le quadrilatère.* A l'aide de coordonnées trilitères, on démontre facilement ce théorème connu :

« Si l'on coupe un quadrilatère complet par une transversale, elle rencontre les trois diagonales en trois points; sur chaque diagonale, on prend le point correspondant harmoniquement au point d'intersection et relativement aux extrémités de la diagonale, on obtient trois points en ligne droite; c'est la droite *conjuguée* à la transversale : lorsque celle-ci se transporte à l'infini, la conjuguée est une droite passant par les milieux des trois diagonales. » On sait que cette dernière propriété est un cas particulier du théorème de Newton, que les centres des coniques inscrits dans un quadrilatère sont sur une même droite.

*Coordonnées quadrilatères.*

10. Soit un tétraèdre ABCD; désignons par $t$, $u$, $v$, $w$ les distances respectives d'un point aux quatre faces BCD, CDA, DAB, ABC : le point sera déterminé lorsqu'on connaît trois rapports entre ces quatre quantités. Par exemple, $\frac{t}{w}$, $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$; $t$, $u$, $v$, $w$ pris dans ce sens, sont les quatre coordonnées du point.

$\varphi(t, u, v, w) = 0$ exprime l'équation d'une surface; équation essentiellement homogène.

ABCD est dit *tétraèdre de référence.*

**11.** *Équation d'un plan.* $at + bu + cv + dv = 0$ est l'équation d'un plan; $a$, $b$, $c$, $d$ quantités constantes.

**12.** *Équations d'un point.*

$$\left.\begin{aligned} at + bu + cv + dw &= 0 \\ a_1 t + b_2 u + c_1 v + d_1 w &= 0 \\ a_2 t + b_2 u + c_2 v + d_2 w &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ sont quatre équat. d'un point;}$$

on en déduit

$$t = (b c_1 d_1), \quad u = (c d_1 a_2), \quad v = (d a_2 b_1), \quad w = (a b_1 c_2).$$

**13.** Prenons encore un quatrième plan

$$a_3 t + b_3 u + c_3 v + d_3 w = 0;$$

pour que les quatre plans passent par le même point, on doit avoir

$$(a b_1 c_2 d_3) = 0:$$

deux de ces plans représentent l'équation d'une droite; ainsi on a la condition pour que deux droites se coupent, et l'on peut prendre arbitrairement deux coefficients dans chacune des deux équations d'une droite.

**14.** Pour que trois plans passent par la même droite, on doit avoir

$$(a b' c'') = 0, \quad (a b_{,} c_{,,}) = 0.$$

**15.** Conditions pour que quatre droites passant par les sommets d'un tétraèdre soient sur le même hyperboloïde. (HERMES.)

Soit ABCD le tétraèdre de référence.

$(g_t) \ldots \dfrac{u}{a_{12}} = \dfrac{v}{a_{13}} = \dfrac{w}{a_{14}}$, équat. d'une droite qui passe par A;

$(g_u) \ldots \dfrac{t}{a_{21}} = \dfrac{v}{a_{23}} = \dfrac{w}{a_{24}}$, » B;

$(g_v) \ldots \dfrac{t}{a_{31}} = \dfrac{v}{a_{32}} = \dfrac{w}{a_{34}}$, » C;

$(g_w) \ldots \dfrac{t}{a_{41}} = \dfrac{u}{a_{42}} = \dfrac{v}{a_{43}}$, » D.

Soient $g_t$, $g_u$, $g_v$ trois génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe, trouver la relation entre les $a$ pour que la droite $g_w$ soit une génératrice du même système.

*Solution.* Soit

$$\frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}},$$

équation d'un plan passant par le sommet A et la droite $(g_u)$;

$$\frac{u}{a_{32}} = \frac{w}{a_{43}},$$

équation d'un plan passant par le sommet A et la droite $(g_v)$;

$$\frac{u}{a_{42}} = \frac{v}{a_{43}},$$

équation d'un plan passant par le sommet A et la droite $(g_w)$.

Ces trois plans doivent se couper suivant une même droite du second système, puisque $g_u$, $g_v$, $g_w$ appartiennent au premier système, éléments de l'hyperboloïde; il faut alors qu'on ait $a_{23} = a_{32}$, $a_{24} = a_{42}$, $a_{34} = a_{43}$, et la droite d'intersection de ces trois plans sera $a_{34}u = a_{24}v = a_{23}w$, droite du second système.

On prouve de la même manière, faisant usage du sommet B, que l'on doit avoir $a_{31} = a_{13}$, $a_{21} = a_{12}$; la condition générale est donc que l'on doit avoir $a_{ki} = a_{ik}$.

Ainsi, les quatre génératrices du second système sont :

$$a_{34} u = a_{24} v = a_{23} w,$$

$$a_{24} t = a_{14} u = a_{12} w,$$

$$a_{23} t = a_{13} u = a_{12} v,$$

et les quatre droites

$$\frac{u}{a_{12}} = \frac{v}{a_{13}} = \frac{w}{a_{14}}, \text{ passant par le sommet A};$$

$$\frac{t}{a_{12}} = \frac{v}{a_{23}} = \frac{w}{a_{24}}, \quad \text{»} \quad \text{B};$$

$$\frac{t}{a_{13}} = \frac{u}{a_{23}} = \frac{w}{a_{34}}, \quad \text{»} \quad \text{C};$$

$$\frac{t}{a_{14}} = \frac{u}{a_{24}} = \frac{w}{a_{34}}, \quad \text{»} \quad \text{D};$$

sont sur le même hyperboloïde (Hermes).

*Note du Rédacteur*. Désignons respectivement par $U_a$, $V_a$, $W_a$ les sinus des angles que fait la droite qui passe par A avec les faces $u$, $v$, $w$ qui se coupent en A; de même par $T_b$, $V_b$, $U_b$ les sinus des angles que fait la droite menée par B avec les faces $t$, $v$, $u$, et ainsi des deux autres.

Lorsqu'on a les six relations suivantes, les quatre droites sont sur le même hyperboloïde ; la quatrième droite $g_w$ rencontre les trois premières, et appartient au second système.

En écrivant les échelles

$$\begin{array}{cccc} T, & U, & V, & W \\ a, & b, & c, & d \end{array}$$

on voit la loi des indices

$$\begin{array}{ll}
1 & T_c U_d - T_d U_c = 0, \\
2 & T_b V_d - T_d V_b = 0, \\
3 & T_b W_c - T_c W_b = 0, \\
3 & U_a V_d - U_d V_a = 0, \\
2 & U_a W_c - U_c W_a = 0, \\
1 & V_a W_b - V_b W_a = 0;
\end{array}$$

car, dans la première droite,

$$\frac{u}{v} = \frac{a_{12}}{a_{13}} = \frac{U_a}{V_a},$$

et dans la dernière,

$$\frac{u}{v} = \frac{a_{24}}{a_{34}} = \frac{U_d}{V_d};$$

donc

$$U_a V_d = U_d V_a,$$

et ainsi des autres.

## NOTE HISTORIQUE SUR LES COURBES PLANES.

Euler est le premier qui ait remarqué le paradoxe que deux courbes de degré $n$ peuvent se couper en un plus grand nombre de points qui suffisent pour les déterminer. (*Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1748.)

La même difficulté a été signalée par Cramer, dans son *Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, 1750; mais les théorèmes géométriques qui dérivent de ce paradoxe n'ont été trouvés que dans le siècle actuel; c'est en 1827. Gergonne a démontré que si parmi les $n^2$ points d'intersection de deux courbes de degré $n$, $np$ sont sur une courbe de degré $p$ moindre que $n$, les $n(n-p)$ restants sont sur une courbe de degré $n-p$. (*Annales*, t. XXVII, p. 220.)

Vers le même temps, Plücker a donné ce théorème :

*Toutes les courbes de degré* n *qui passent par* $\frac{n(n+3)}{2}-1$ *points fixes passent encore par* $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ *autres points fixes.* (*Entwicklungen*, vol. I, p. 228 ; Gergonne, *Annales*, t. XIX, p. 97, 129.) Quelques années après, ont été discutées les relations entre les points d'intersection des lignes et celles des surfaces de *différents* degrés. Exemples :

*Une courbe de degré* n *qui passe par* $np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ *points d'une courbe de degré* $p<n$, *rencontre encore cette courbe en* $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ *autres points fixes.* (*Journal de Crelle*, t. XV, p. 285, JACOBI ; t. XVI, p. 47, PLÜCKER.)

Enfin, on doit à M. Cayley ce théorème général :

m, n, r *étant trois nombres entiers*, r *supérieur soit à* m *ou soit à* n, *mais inférieur à* $(m+n-3)$ ; *une courbe de degré* r *qui passe à travers* $\frac{(m+n-r-1)(m+n-r-2)}{1.2}$ *points des* mn *points d'intersection de deux courbes de degré* m *et* n, *passe encore par les autres points d'intersection.* (*Camb. mat. Journal*, vol. III, p. 211.) (Extrait des *High. planes*, p. 25.)

## BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications; par M. *G. Lamé*. In-8 avec figures dans le texte; 1859. Prix : 5 francs, chez Mallet-Bachelier, libraire.

Sous ce titre modeste, M. Lamé a réuni les principes d'une analyse toute nouvelle; c'est un horizon immense ouvert aux recherches mathématiques. Comme tous les ouvrages du savant académicien, ce dernier livre se distingue par l'unité des vues, la clarté et l'elégance de l'exposition. Nous ne pouvons donner qu'une idée succincte des matières contenues dans ce volume.

Un point de l'espace peut être regardé comme déterminé par l'intersection de trois surfaces orthogonales; les paramètres de ces surfaces, dites surfaces *conjuguées*, sont les coordonnées curvilignes du point.

Cet ouvrage contient deux grandes divisions, savoir :

1°. La *théorie*, comprenant :

Les formules qui servent à passer des coordonnées *rectilignes* à des coordonnées *curvilignes* quelconques;

Les expressions des courbures des surfaces conjuguées et de leurs intersections;

Enfin les équations aux différences partielles qui régissent les paramètres *differentiels* de ces surfaces.

En supposant l'équation de la surface mise sous la forme

$$\rho = f(x, y, z)$$

($\rho$ étant une constante arbitraire), on appelle paramètres différentiels du premier et du second ordre les expressions

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\rho}{dz}\right)}, \quad \left(\frac{d^2\rho}{dx^2}+\frac{d^2\rho}{dy^2}+\frac{d^2\rho}{dz^2}\right)$$

2°. Les *applications*, qui renferment :

La détermination analytique des coordonnées elliptiques ;

La transformation en coordonnées curvilignes du mouvement d'un point matériel ;

Les systèmes cylindriques isothermes et en particulier le système bi-circulaire et le système des lemniscates ;

La transformation des systèmes orthogonaux par rayons vecteurs réciproques ;

Les équations de la théorie mathématique de l'élasticité en coordonnées curvilignes ;

Enfin la solution complète du problème de l'équilibre d'élasticité dans les enveloppes sphériques.

On constate, dans ces applications, les remarquables analogies des lois mathématiques qui régissent : le potentiel, dans la théorie de l'attraction ; la température, dans celle de la chaleur ; la dilatation cubique et les déplacements moléculaires, dans celle de l'élasticité. C'est un rapprochment sur lequel M. Lamé insiste fréquemment. Nous devons en effet espérer que, dans un avenir plus ou moins lointain, on rattachera à une seule et unique loi mathématique les divers phénomènes physiques classés actuellement sous des dénominations différentes.

D'après ce rapide aperçu, on pressent les nombreux résultats dont on dû s'enrichir la physique et la géométrie. Entreprendre une analyse plus complète, serait vouloir reproduire l'ouvrage lui-même.

Nous ne pouvons cependant nous empêcher de signaler deux remarquables exemples d'intégration. Le premier a pour objet la recherche d'un système orthogonal dont l'ellipsoïde est une des surfaces conjuguées, ce qui conduit aux coordonnées elliptiques. Le second donne la solution générale du problème de l'équilibre d'élasticité dans le cas des enveloppes sphériques. Là tout est nouveau, et l'élégance du calcul ne le cède qu'à la difficulté de la question. Ce sont deux modèles à suivre dans les problèmes de ce genre. Nous devons donc savoir un gré infini à l'auteur d'avoir conservé la méthode d'invention dans l'exposé didactique de ces théories et de leurs applications.

La physique mathématique a été l'origine de la découverte des coordonnées curvilignes; aussi est-ce sur ce terrain que la nouvelle analyse a fait le plus d'explorations. Néanmoins la mécanique, la géométrie ont déjà été puiser à ses formules, et la théorie des coordonnées curvilignes est destinée à prêter les plus grands secours à toutes les branches des mathématiques.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à formuler un désir : c'est de voir la *Théorie de la chaleur* suivre bientôt les *Leçons sur les coordonnées curvilignes*.

L. Painvin.

---

## Journal fur die reine und angewandte Mathematik

(Crelle, t. LVII, 1er cahier, 1859.)

(voir p 81)

### *Mécanique.*

H. Helmholtz (pages 1-72), à Heidelberg. *Théorie des oscillations de l'air dans des tubes ouverts aux deux bouts.*

La théorie des tuyaux d'orgues a occupé plusieurs géomètres et physiciens. Le premier en date est Daniel Bernoulli (*Acad. des Sciences*, 1762). Viennent ensuite :

Euler (*N. C. A. Peter.*, t. XVI, p. 347; 1772).

Poisson (*Acad. des Sciences*, t. II, p. 305; 1847).

MM. Quet (*Journal de Liouville*, t. XX, p. 1); Duhamel (*ibid.*, t. XVI, p. 49).

Masson (*Ann. de Chimie et de Phys.*, 3e série; t. XL, p. 418).

Wertheim (*ibid.*, 3e série; t. XXXI, p. 428).

Soudhaufs (*Poggendorff's Ann.*, t. LXXXI, p. 347).

Hopkins (*Trans. of the Camb. Philos. Soc.*, vol. V).

Les théoriciens ont recours à diverses hypothèses; par exemple, que les directions des molécules d'air dans l'intérieur du tube sont toutes parallèles à l'axe; que dans chaque section transverse, les molécules aériennes ont même vitesse, supportent la même pression; qu'à l'embouchure la densité est nulle, ou du moins très-petite; qu'à cette embouchure, il y a passage subit d'ondes planes à ondes sphériques; etc., etc. M. Helmholtz abandonne toutes ces hypothèses, et résout le problème uniquement d'après les données mathématiques. A cet effet, il établit deux fonctions : l'une géométrique, relative à la forme du tube, à l'aire de l'embouchure, et l'autre dynamique, relative aux forces qui engendrent les vibrations sonores, et, s'appuyant sur des théorèmes de physique moléculaire, établis par Green (Crelle, t. XLIV, p. 360); il démontre que ces fonctions $\varphi$ et $\psi$ jouissent des mêmes propriétés que les fonctions *potentielles* dans les théories électriques et magnétiques. Les points attractifs sont remplacés, en acoustique, par des points excitant les vibrations. Il assigne les emplacements des tranches à vitesse *minima* et densité maxima (tranches nodales), et fait entrer dans son calcul la longueur des amplitudes et la durée des phases. Ce qu'il y a de plus remarquable et de plus nouveau, c'est l'état dynamique de la portion du tube qui avoisine l'ouverture et celui de l'air environnant extérieurement, où se propagent les ondes sphériques. Les sons *calculés* s'accordent assez bien avec les sons *expérimentés* par Hopkins, Wertheim et Soudhaufs; l'intégration amène vingt-sept équations principales, dont chacune a des équations corollaires.

Ce Mémoire, sujet d'une belle thèse, serait une excellente importation.

A. Clebsch, de Carlsruhe (p. 73-77). *Théorie des moments d'inertie et du mouvement de rotation autour d'un point.*

Soient $Ma^2$, $Mb^2$, $Mc^2$ les moments d'inertie par rapport aux trois axes principaux passant par le centre de gravité; menant par ce centre une droite faisant avec ces axes les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, le moment d'inertie par rapport à cette droite sera

$$M(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma);$$

faisons

$$(1) \qquad \rho^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

par l'extrémité de $\rho$, menons un plan perpendiculaire à $\rho$, et ayant pour équation

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1,$$

on a

$$\cos\alpha = -\rho u, \quad \cos\beta = -\rho v, \quad \cos\gamma = -\rho w;$$

donc

$$1 = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2;$$

construisons l'ellipsoïde

$$(2) \qquad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2};$$

on a ce théorème :

*La perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur* *le plan tangent à cet ellipsoïde, représente le* RAYON D'INERTIE *pris par rapport à cette perpendiculaire.*

L'auteur nomme cet ellipsoïde *second ellipsoïde central,* pour le distinguer du premier en usage, dont les demi-diamètres sont proportionnels aux racines carrées de moments d'inertie inverse. Si l'on fait passer un axe par un point $(x, y, z)$, on a pour équation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} 1 = {} & (a^2 + r^2)u^2 + (b^2 + r^2)v^2 + (c^2 + r^2)w^2 \\ & - (ux + vy + wz)^2, \end{aligned}\right.$$

où

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

et $u$, $v$, $w$ ont même signification que dessus. Faisant varier $u$, $v$, $w$, l'équation (3) est celle d'une ellipse qui a pour centre le point $x$, $y$, $z$, et les perpendiculaires abaissées de ce centre sur les plans tangents sont les rayons d'inertie relativement aux divers axes passant par ce centre; pour trouver les axes principaux de cet ellipsoïde, il faut rendre minima

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

ce qui mène à cette équation du troisième degré :

$$(4)\quad 1 = \frac{x^2}{a^2 + r^2 - \rho^2} + \frac{y^2}{b^2 + r^2 - \rho^2} + \frac{z^2}{c^2 + r^2 - \rho^2}.$$

On voit que ce sont les trois surfaces confocales à l'ellipsoïde (2), et les rayons d'inertie *principaux* qui passent par le point $x$, $y$, $z$ ont pour direction les normales menées de ce point à ces trois surfaces, et pour valeurs $\sqrt{r^2 + \lambda^2}$, $\sqrt{r^2 + \mu^2}$, $\sqrt{r^2 + \nu^2}$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant les paramètres des trois surfaces confocales.

Lorsque $\rho$ est constant, l'ellipsoïde (4) représente, en optique, les vitesses de propagation des rayons dans les milieux cristallisés.

L'auteur établit encore plusieurs théorèmes intéressants ; entre autres ceux-ci :

Les points pour lesquels les moments d'inertie principaux sont égaux, forment la ligne focale sur l'ellipsoïde $(z)$.

Si dans l'ellipsoïde $(z)$ on mène le rayon vecteur qui représente l'axe du couple moyen *der beweugngs grösse*, le plan tangent passant par son extrémité indique le plan de rotation du corps, et la normale passant par cette extrémité est l'axe instantané de rotation ; on suppose fixe le centre de gravité ; la vitesse instantanée de rotation est inversement proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan tangent.

Et d'autres théorèmes analogues à ceux de M. Poinsot.

### *Calcul infinitésimal.*

S. Spitzer, à Vienne (p. 78-80). *Note sur l'équation différentielle de la série hypergéométrie.*

Cette équation, qu'on doit à Gauss, est

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + n)\pi]y' - \alpha\beta y = 0.$$

Dans le t. LVI (p. 149) de Crelle, M. Heine a donné l'intégrale de cette équation, trouvée dans les papiers laissés par Jacobi. M. Spitzer s'occupe de l'intégration dans le cas spécial où $\alpha = \beta$, et trouve

$$y = C_1 \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(x-u)^{-\alpha}\,du$$

$$+ C_2 \int_0^1 u^{\alpha-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(\pi-x)^{-\alpha}\log\frac{u(1-u)}{x-u}\,du,$$

et ne fait que vérifier cette intégrale par différentiation.

Dans une Note additive, M. Borchardt montre qu'on peut déduire facilement le cas particulier de la solution générale.

S. Spitzer, à Vienne (p. 82-87). *Sur l'intégration de l'équation différentielle*

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y,$$

*par des intégrales déterminées.*

Kummer a donné l'intégrale des équations de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y,$$

$m$ étant entier et positif. (Crelle, t. XIX.)

M. Spitzer, en suivant à peu près la même marche, ramène à des intégrales déterminées l'intégration de l'équation

$$x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \varepsilon y;$$

$m$ entier positif $> 2n$ et $\varepsilon = \pm 1$.

Supposons qu'on sache trouver l'intégrale de l'équation

$$x^{m+1} \frac{dz^{n+1}}{dx^{n+1}} = \varepsilon z,$$

et qu'on ait

$$z = \psi(x);$$

$\psi(x)$ renfermant $n+1$ constantes arbitraires; on aura pour intégrale de l'équation $x^m \frac{d^n y}{dx^n} = -\varepsilon y$,

$$y = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m-n}}{m-n}} \psi\left(\frac{u}{x}\right) du,$$

et entre les $n+1$ constantes, il existe une relation qui les réduit à $n$ constantes.

*Exemple.* L'intégrale de l'équation $x^{2n+2}\dfrac{dz^{n+1}}{dx^{n+1}} = z$ est

$$z = x^n\left(C_1 e^{-\frac{\mu_1}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2}{x}} + \ldots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1}}{x}}\right),$$

où les $\mu$ sont les racines de $\mu^{n+1} = 1$.

Alors on a pour intégrale de $x^{2n+1}\dfrac{dy^n}{dx^n} = -y$,

$$y = x^n \int_0^\infty u^n e^{-\frac{u^{n+1}}{n+1}}$$

$$\times\left(C_1 e^{-\frac{\mu_1 u}{x}} + C_2 e^{-\frac{\mu_2 u}{x}} + \ldots + C_{n+1} e^{-\frac{\mu_{n+1} u}{x}}\right),$$

où

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_{n+1} = 0.$$

## *Géométrie.*

De Staudt (Erlangen) (p. 88 et 89). Quelques propositions de Géométrie.

(Voir *Journal.*)

## *Arithmologie.*

Oettinger (Fribourg. Brisgau) (p. 90). Deux théorèmes. (Voir *Journal.*)

## *Mélanges.*

Borchardt, rédacteur (p. 91 et 92). *Sur Pierre-Gustave Lejeune-Dirichlet.*

Le 6 mai de cette année (1859), les sciences naturelles ont fait une perte immense dans la personne de M. de Humboldt, et les sciences exactes, la veille, dans la personne de Dirichlet. L'illustre analyste est né le 13 février 1805, à Düren, près Aix-la-Chapelle, alors du département de la Roër. Le premier il a établi un passage entre le *continu* et le *discontinu* numérique, et a pour ainsi dire jeté un pont entre le monde infinitésimal et le monde arithmétique : c'est sa découverte capitale, et qui léguera son nom aux générations de l'avenir. Esprit profondément pénétrant, d'une logique consciencieusement sévère, notre ancien compatriote s'est attaché aux parties les plus ardues de l'ardue théorie des nombres; trente-six Mémoires sont insérés dans le recueil de l'Académie de Berlin, dans les journaux de Crelle et de Liouville. Il avait encore de grands projets en vue; mais travaillant presque toujours de tête, et jetant au plus quelques calculs intermédiaires sur des feuillets volants, on n'a malheureusement rien trouvé dans ses papiers, sinon un travail concernant l'hydrodynamique, et dont on peut espérer une prochaine publication.

Outre un génie créateur, Dirichlet possédait des qualités professorales tellement éminentes, qu'elles ont exercé une influence considérable sur les progrès mathématiques en Allemagne. Les Leçons *sur la théorie des nombres, sur les forces agissant en raison inverse des carrés des distances, sur les équations aux différences partielles linéaires, sur les intégrales déterminées*, leçons imprimées sur des copies soignées, formeront le meilleur traité sur ces matières.

Il n'a pas laissé d'ouvrages, mais on peut considérer comme tels, et des meilleurs, des disciples comme feu Eisenstein et Borchardt.

Sa femme, objet d'une vive affection, l'ayant précédé de quelques mois, hâta la catastrophe. Petite-fille du philosophe Mendelsohn, sœur du compositeur de ce nom, épouse du géomètre, elle s'est toujours montrée digne de cette triple illustration; brillante tiare.

M. B. Tortolini a exprimé d'éloquents regrets sur cette mort prématurée (*Annali*, n° 3, 1859; p. 196), et a rappelé le séjour que fit Dirichlet à Rome, d'octobre 1843 à avril 1844, avec toute sa famille, alors composée de sa femme et de deux petits garçons. Il était accompagné de ses deux amis Jacobi et Steiner, et de son élève Borchardt. Jacobi comparait le génie de Dirichlet à celui de Lagrange : même lucidité, même profondeur, même intensité, mêmes tendances arithmologiques. Il a été admis comme précepteur dans la famille du général Foy, à Paris. Aimant la France de prédilection, il m'a témoigné le désir d'y obtenir une chaire ; désir non réalisable. Toutefois Colbert considérait l'acquisition d'illustres étrangers comme une riche importation. C'est à cette idée grandement patriotique que nous devons Cassini, Maraldi. — *Utinam! sapienti sat.*

---

EXERCICE D'ANALYSE NUMÉRIQUE, Extraits, Commentaires et Recherches, relatifs à l'analyse indéterminée et à la théorie des nombres; par *V.-A. Le Besgue,* Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Bordeaux, membre correspondant de l'Institut. Paris, 1859. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 3 francs.

La science des nombres n'est pas tout entière dans l'arithmétique, c'est-à-dire dans les procédés des calculs; elle comprend encore et surtout l'arithmologie, ou théorie des nombres, dont les ouvrages élémentaires ne peuvent parler que d'une manière accessoire. Ainsi, l'élève qui explique la divisibilité d'un nombre par 9 ou par 11, fait de l'arithmologie sans le savoir; mais cette science, si peu répandue, n'en est pas moins une des plus élevées et des plus attrayantes pour les esprits supérieurs.

L'arithmologie est bien ancienne; on doit la faire remonter à Pythagore, et même plus loin. A la vérité, notre siècle est trop positif pour adopter les idées mystiques dont s'inspirait l'antiquité; mais plusieurs illustres mathématiciens s'y sont livrés avec une ardeur qui semblait s'accroître par les difficultés toutes particulières à ce genre d'études.

Cependant il n'existait pas de traité qui résumât la science avec méthode et qui complétât ces deux grands monuments, la *Théorie des nombres* et les *Recherches arithmétiques*, au moyen des matériaux épars dans une foule de Mémoires dus à différents auteurs. C'est ce qu'a tenté avec courage et bonheur M. Le Besgue, déjà connu lui-même par de beaux travaux d'arithmologie, et l'ouvrage qu'il publie sous le titre modeste d'*Exercices*, n'est autre chose que la première partie du traité que réclamait le monde savant.

Dans la première section, intitulée *Observations préliminaires*, l'auteur rappelle que deux nombres sont *congrus* entre eux relativement à un *module*, c'est-à-dire à un nombre quelconque, lorsque la différence de ces deux nombres est divisible par ce module. Il expose ensuite divers théorèmes sur les permutations, les nombres figurés, etc.

La deuxième section contient l'analyse indéterminée du premier degré, traitée d'une manière complète. On y trouve une foule de développements importants, que ne renferme aucun des traités ordinaires d'algèbre; par exemple, les règles de Paoli et de M. Hermite pour le nombre de solutions positives. Chemin faisant, l'auteur expose la théorie du plus grand commun diviseur et plusieurs théorèmes sur les nombres premiers.

La dernière section porte le titre d'*Applications*, parce qu'elle montre les conséquences de ce qui a déjà été vu sur les congruences et les nombres premiers, mais elle contient, en réalité, des développements théoriques aussi intéressants que variés. On y remarque la décomposition des nombres en carrés et bicarrés, ainsi que différents théorèmes sur les nombres premiers, et notamment celui de Wilson, qui caractérise ces nombres. Enfin, l'auteur signale l'usage que l'on fait, depuis Gauss, des nombres complexes imaginaires formés des racines de l'unité, et montre aussi l'emploi des séries divergentes.

S'il se présente, comme nous l'espérons pour l'honneur de la science, un nombre suffisant de souscripteurs, M. Le Besgue achèvera par parties détachées, mais complètes, la publication de son beau travail, dont cette brochure de 150 pages forme à peu près le tiers.

Nous devons louer chez M. Le Besgue, outre la précision et la clarté du style, une réserve bien nécessaire dans des questions aussi délicates. Quand une démonstration lui paraît obscure ou insuffisante, il le dit franchement. Il doute, à plus forte raison, des théorèmes énoncés sans démonstration, surtout dans la mystérieuse théorie des nombres premiers. Par exemple, est-il vrai, comme on l'a dit, qu'au delà de toute limite donnée, on trouve deux nombres impairs consécutifs et premiers? Est-il vrai que tout nombre pair soit la somme de deux nombres premiers? C'est probable, mais ce n'est pas certain.

Une pareille prudence n'est que trop justifiée dans l'étude de l'arithmologie. On sait qu'Euler a montré la fausseté d'un théorème de Fermat, qui avouait, à la vérité, ne pas en avoir la démonstration. On sait aussi que la *Théorie des Nombres*, de Legendre, contient quelques théorèmes inexacts. En un mot, c'est dans cette science, plus que dans toute autre, qu'il ne faut rien affirmer sans preuve, pas même le fameux théorème de Fermat, que l'Académie des Sciences remet tous les ans au concours.

Pour faire la part de la critique, nous désirerions chez M. Le Besgue des indications un peu plus précises sur les sources auxquelles il a puisé. Ainsi, nous voyons bien que le théorème énoncé par Fermat sur les nombres figurés a été démontré par Cauchy; mais quelle est cette démonstration, ou, du moins, dans quel Mémoire se trouve-t-elle? Peut-être, du reste, l'auteur se propose-t-il de compléter ces indications dans les publications successives.

Nous voudrions donc voir compléter cet ouvrage, d'autant plus indispensable que ceux de Gauss et de Legendre, déjà épuisés, ne sont plus au courant de la science, et nous unissons nos vœux à ceux de M. Le Besgue, pour que de nombreux souscripteurs lui permettent, par une modique offrande, d'achever l'édifice qu'il a si bien commencé.

Ch. Housel,
Professeur

---

Traité des surfaces du second ordre et développements de géométrie analytique a trois dimensions, à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale; par M. *Saint-Loup*, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Strasbourg, et M. *Bach*, chargé du cours de mathématiques pures à la Faculté de Strasbourg, chevalier de la Légion d'honneur. Paris, 1859; in-8° de 96 pages avec planche. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 3 francs.

Ce Traité contient, en moins de 100 pages, toutes les connaissances exigées par les Programmes, et même au delà. La méthode fort simple exposée au début de l'ouvrage pour la classification des surfaces est contenue en principe dans un Mémoire de M. Finck (*Journal* de Liouville, 1838). Si les auteurs ne l'ont pas cité, c'est sans doute parce que cette méthode, que M. Finck lui-même attribue à M. Plücker, revient à décomposer en carrés l'équation de la surface, idée qui est aujourd'hui tombée dans le domaine public.

Malgré le peu d'étendue de l'ouvrage, les auteurs ne négligent pas les exemples numériques; enfin ils ajoutent quelques considérations sur des surfaces d'un degré supérieur au second, telles que le tore et la surface de l'onde.

Du reste, l'ouvrage est écrit avec autant de clarté que de précision, et nous pensons qu'il peut être mis avec avantage entre les mains des élèves. CH. HOUSEL,

Professeur.

---

RÉSUMÉ DE LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET DE CALCUL INFINITÉSIMAL; ETC.; par *J.-B. Belanger*, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur de mécanique à l'École Polytechnique. In-8 de 296 pages avec planches. Paris, 1859. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 6 francs.

Nous ne saurions recommander avec trop d'instance cette instructive production aux professeurs enseignants et aux jeunes étudiants. On y trouve ce qu'il est indispensable d'apprendre, et le savant auteur possède le talent excessivement rare de savoir ce qu'il ne faut pas dire. Des exemples numériques, choisis avec sagacité, éclaircissent les théories abstraites. La trigonométrie est présentée comme science de *rapports*; idée émise dans le *Manuel de Géométrie* (Roret). On regrette que, se conformant à l'usage, l'auteur n'ait pas adopté la division décimale du cercle. Trois professions repoussent très-illégalement cette division : les bladiers, les négociants en vins et les astronomes. A Paris le blé se vend par 150 litres et la farine par 157 kilogrammes; mêmes variations dans d'autres marchés. Dans la Côte-d'Or, il y a des tonneaux de 456, 114, 57 litres. On ignore pourquoi les astronomes ont abandonné le système décimal admis par Laplace, Borda, Legendre. On prêche l'adoption de ce système : l'exemple est la meilleure des prédications.

---

# TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME V.)

## Analyse algébrique.



## Arithmologie.



## Analyse des formes.



## Analyse fonctionnelle.



## Calcul infinitésimal.

## Géométrie.



## Mécanique.



## Bibliographie.

## Historique et Biographie.



## TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Collaboratenrs sont précédés d'un astérisque.)

## DEMANDE.

Où trouve-t-on des renseignements *biographiques* sur le géomètre hollandais ABRAHAM CUFUELER, auteur du *Specimen artis ratiocinandi,* in-12; Hamburgi, 1684; ouvrage philosophique raisonné avec une conscience mathématique? La traduction serait encore utile, aujourd'hui, comme antidote au panthéisme matérialiste.



PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.