PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 89-107

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__89_1>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir p. 49),

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

---

§ III. — *Intersection d'un plan avec une surface du second ordre.*

45. Soient

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ &\quad + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{aligned} \right\} = 0,$$

l'équation d'une surface du second ordre, et

$$(2)\qquad m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0$$

l'équation d'un plan.

L'élimination successive de x_1 et x_2 entre les équations (1) et (2) donnera les projections de la courbe d'intersection sur les plans des x_2x_3 et x_1x_3.

On trouvera ainsi, après avoir posé

$$(3)\qquad \mathrm{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{où} \quad a_{r,s} = a_{s,r},$$

pour la projection sur le plan des $x_2 x_3$,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}} x_2^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{22}} x_3^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{33}} x_4^2 \\ & - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{23}} x_2 x_3 - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{24}} x_2 x_4 \\ & - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{34}} x_3 x_4 = 0; \end{aligned} \right.$$

et pour la projection sur le plan des $x_1 x_3$,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}} x_1^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{11}} x_3^2 + \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{33}} x_4^2 \\ & - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{13}} x_1 x_3 - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{14}} x_1 x_4 \\ & - 2\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{34}} x_3 x_4 = 0. \end{aligned} \right.$$

46. Je vais donner d'abord les développements des coefficients de ces deux équations

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}} &= - a_{11} m_2^2 - a_{22} m_1^2 + 2a_{12} m_1 m_2, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{44}} &= - a_{11} m_3^2 - a_{33} m_1^2 + 2a_{13} m_1 m_3, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{44}} &= - a_{22} m_3^2 - a_{33} m_2^2 + 2a_{23} m_2 m_3, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{33}} &= - a_{11} m_4^2 - a_{44} m_1^2 + 2a_{14} m_1 m_4, \\ \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{33}} &= - a_{22} m_4^2 - a_{44} m_2^2 + 2a_{24} m_2 m_4. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 T}{da_{23}\, da_{44}} &= a_{11} m_2 m_3 + a_{23} m_1^2 - a_{12} m_1 m_3 - a_{13} m_1 m_2,\\
\frac{d^2 T}{da_{13}\, da_{44}} &= a_{22} m_1 m_3 + a_{13} m_2^2 - a_{12} m_2 m_3 - a_{23} m_1 m_2,\\
\frac{d^2 T}{da_{24}\, da_{33}} &= a_{11} m_2 m_4 + a_{24} m_1^2 - a_{12} m_1 m_4 - a_{14} m_1 m_2,\\
\frac{d^2 T}{da_{14}\, da_{33}} &= a_{22} m_1 m_4 + a_{14} m_2^2 - a_{12} m_2 m_4 - a_{24} m_1 m_2,\\
\frac{d^2 T}{da_{34}\, da_{22}} &= a_{11} m_3 m_4 + a_{34} m_1^2 - a_{13} m_1 m_4 - a_{14} m_1 m_3,\\
\frac{d^2 T}{da_{34}\, da_{11}} &= a_{22} m_3 m_4 + a_{34} m_2^2 - a_{23} m_2 m_4 - a_{24} m_2 m_3.
\end{aligned}\right.$$

Les relations d'identité que je vais écrire se déduisent des formules générales

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{P}\,\frac{d^2 \mathrm{P}}{da_{rs}\, da_{r_1 s_1}} = \frac{d\mathrm{P}}{da_{rs}}\,\frac{d\mathrm{P}}{da_{r_1 s_1}} - \frac{d\mathrm{P}}{da_{rs_1}}\,\frac{d\mathrm{P}}{da_{r_1 s}},\\
&\frac{d^2 \mathrm{P}}{da_{rs}\, da_{r_1 s_1}} = -\frac{d^2 \mathrm{P}}{da_{rs_1}\, da_{r_1 s}}.
\end{aligned}\right.$$

On a en premier lieu

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{T}\,\frac{d^2 \mathrm{T}}{da_{33}\, da_{44}} &= \frac{d\mathrm{T}}{da_{33}}\,\frac{d\mathrm{T}}{da_{44}} - \left(\frac{d\mathrm{T}}{da_{34}}\right)^2,\\
\mathrm{T}\,\frac{d^2 \mathrm{T}}{da_{22}\, da_{44}} &= \frac{d\mathrm{T}}{da_{22}}\,\frac{d\mathrm{T}}{da_{44}} - \left(\frac{d\mathrm{T}}{da_{24}}\right)^2,\\
\mathrm{T}\,\frac{d^2 \mathrm{T}}{da_{11}\, da_{44}} &= \frac{d\mathrm{T}}{da_{11}}\,\frac{d\mathrm{T}}{da_{44}} - \left(\frac{d\mathrm{T}}{da_{14}}\right)^2,\\
\mathrm{T}\,\frac{d^2 \mathrm{T}}{da_{22}\, da_{33}} &= \frac{d\mathrm{T}}{da_{22}}\,\frac{d\mathrm{T}}{da_{33}} - \left(\frac{d\mathrm{T}}{da_{23}}\right)^2,\\
\mathrm{T}\,\frac{d^2 \mathrm{T}}{da_{11}\, da_{33}} &= \frac{d\mathrm{T}}{da_{11}}\,\frac{d\mathrm{T}}{da_{33}} - \left(\frac{d\mathrm{T}}{da_{13}}\right)^2,\\
\mathrm{T}\,\frac{d^2 \mathrm{T}}{da_{11}\, da_{22}} &= \frac{d\mathrm{T}}{da_{11}}\,\frac{d\mathrm{T}}{da_{22}} - \left(\frac{d\mathrm{T}}{da_{12}}\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

On aura, en second lieu,

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_1^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{44}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{33}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{22}}-\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2,\\
-m_1^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{33}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{22}}-\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{24}}\right)^2,\\
-m_1^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{34}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{34}}+\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{23}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{24}};
\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_1^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{22}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{33}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{44}}-\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{34}}\right)^2,\\
-m_1^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{24}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{44}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{24}}+\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{34}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{23}},\\
-m_1^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{23}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{33}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{23}}+\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{22}\,da_{34}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{24}};
\end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_2^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{44}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{33}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{11}}-\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{13}}\right)^2.\\
-m_2^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{33}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{11}}-\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{14}}\right)^2,\\
-m_2^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{34}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{34}}+\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{13}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{14}};
\end{aligned}\right.$$

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
-m_2^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{11}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{33}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{44}}-\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{34}}\right)^2,\\
-m_2^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{14}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{44}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{14}}+\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{34}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{13}},\\
-m_2^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{13}} &= \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{33}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{13}}+\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{11}\,da_{34}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{33}\,da_{14}};
\end{aligned}\right.$$

$$(13)\quad\left\{\;-m_3^2\frac{d\mathrm{T}}{da_{44}} = \frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{11}}\,\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{22}}-\left(\frac{d^2\mathrm{T}}{da_{44}\,da_{12}}\right)^2.\right.$$

Enfin je rappellerai les relations suivantes qui résultent de la propriété fondamentale des déterminants :

$$(14)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{dT}{da_{14}} + m_2 \dfrac{dT}{da_{24}} + m_3 \dfrac{dT}{da_{34}} + m_4 \dfrac{dT}{da_{44}} = 0, \\ m_1 \dfrac{dT}{da_{13}} + m_2 \dfrac{dT}{da_{23}} + m_3 \dfrac{dT}{da_{33}} + m_4 \dfrac{dT}{da_{43}} = 0, \\ m_1 \dfrac{dT}{da_{12}} + m_2 \dfrac{dT}{da_{22}} + m_3 \dfrac{dT}{da_{32}} + m_4 \dfrac{dT}{da_{42}} = 0, \\ m_1 \dfrac{dT}{da_{11}} + m_2 \dfrac{dT}{da_{21}} + m_3 \dfrac{dT}{da_{31}} + m_4 \dfrac{dT}{da_{41}} = 0; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} m_1 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} + m_2 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} + m_3 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{33}} = 0, \\ m_1 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{12}} + m_2 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}} + m_3 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{32}} = 0, \\ m_1 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{11}} + m_2 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{21}} + m_3 \dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{31}} = 0. \end{cases}$$

Ces préliminaires étant posés, nous allons discuter les équations (4) et (5).

Première hypothèse. $\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ *est différent de zéro.*

47. En formant dans l'équation (4) le carré par rapport à la variable x_2, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned} X_1^2 &+ \left[\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} - \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2\right] x_3^2 \\ &+ \left[\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{22}} - \left(\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\right)^2\right] x_4^2 \\ &- 2\left[\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}} + \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\,\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\right] x_3\,x_4 \end{aligned}\right\} = 0,$$

après avoir posé

$$X_1 = \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\,x_2 - \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\,x_3 - \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\,x_4;$$

ou bien, en ayant égard aux relations (9),

$$(16)\quad X_1^2 - m_1^2\left(\frac{dT}{da_{44}}\,x_3^2 - 2\,\frac{dT}{da_{34}}\,x_3\,x_4 + \frac{dT}{da_{33}}\,x_4^2\right) = 0.$$

Nous supposerons toujours que m_1 et m_2 ne sont pas nuls; ce n'est qu'à la fin de la discussion que nous étudierons ce cas exceptionnel.

PREMIER CAS. $\frac{dT}{da_{44}}$ *est différent de zéro.*

En formant le carré par rapport à x_3 et en posant

$$\frac{dT}{da_{44}} X_2 = \frac{dT}{da_{44}} x_3 - \frac{dT}{da_{34}} x_4,$$

l'équation (16) pourra s'écrire

$$X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} X_2^2 - m_1^2 \frac{\frac{dT}{da_{33}} \frac{dT}{da_{44}} - \left(\frac{dT}{da_{34}}\right)^2}{\frac{dT}{da_{44}}} x_4^2 = 0;$$

ou bien, d'après la première des relations (8),

$$(17) \qquad X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} X_2^2 - m_1^2 \frac{T \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}}{\frac{dT}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

De cette dernière équation, nous conclurons que

(I) $\qquad \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ *et* $\frac{dT}{da_{44}}$ *étant différents de zéro* (*).

Si $\frac{dT}{da_{44}} > 0$, { il y a *intersection*, lorsque $T \gtrless 0$, il y a *tangence*, lorsque $T = 0$,

Si $\frac{dT}{da_{44}} < 0$, { il y a *non-intersec.*, lorsque $T \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} > 0$, il y a *intersection*, lorsque $T \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} < 0$, il y a *tangence*, lorsque $T = 0$.

(*) Ces utiles et beaux *criterium*, resultats d'une discussion consciencieuse, ne se trouvent, à ce que je sache, nulle part. TM.

Le contact résulte de ce que l'hypothèse $T = 0$, introduite dans l'équation de la projection sur le plan des $x_1 x_3$, donne aussi un point ou deux droites qui se coupent; car si l'on fait subir à l'équation (5) les transformations que nous venons d'effectuer, les coefficients de x_4^2 ne différeront que par le changement de m_1 en m_2.

48. Lorsqu'il y a tangence, les coordonnées du point de contact sont données par les équations :

$$\left\{\begin{aligned} & m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ & \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}} x_2 - \frac{d^2 T}{da_{44}\, da_{23}} x_3 - \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{24}} x_4 = 0, \\ & \frac{dT}{da_{44}} x_3 - \frac{dT}{da_{34}} x_4 = 0. \end{aligned}\right.$$

Par des transformations faciles, reposant sur les relations d'identité que j'ai établies d'abord, on arrive aux valeurs suivantes :

$$(18) \qquad x_1 = \frac{dT}{da_{14}}, \quad x_2 = \frac{dT}{da_{24}}, \quad x_3 = \frac{dT}{da_{34}}, \quad x_4 = \frac{dT}{da_{44}}.$$

49. Deuxième cas. $\dfrac{dT}{da_{44}}$ *est nul.*

L'équation (16) devient alors

$$(19) \qquad X_1^2 - m_1^2 \left(\frac{dT}{da_{33}} x_4^2 - 2 \frac{dT}{da_{34}} x_3 x_4 \right) = 0,$$

et la première des identités (8) donne

$$(20) \qquad T \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}} = - \left(\frac{dT}{da_{34}} \right)^2.$$

Si $\dfrac{dT}{da_{34}}$ est différent de zéro, il en sera de même de T, et réciproquement; et ces deux expressions s'annuleront en même temps, car $\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ a été supposé différent de zéro.

Lorsque T n'est pas nul, l'équation (19) nous montre qu'il y a intersection. Lorsque T est nul, l'équation (19) se réduit, d'après la remarque que nous venons de faire, à

$$X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{33}} x_4^2 = 0;$$

mais alors la projection sur le plan des $x_1\ x_3$ a pour équation

$$X_1'^{\,2} - m_2^2 \frac{dT}{da_{33}} x_4^2 = 0,$$

en représentant par X_1' la fonction linéaire

$$\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} x_1 - \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} x_3 - \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}} x_4.$$

De là nous concluons que

(II) $\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ *étant différent de zéro et* $\frac{dT}{da_{44}}$ *nul :*

Si $T \gtrless 0$, il y a *intersection;*

$$\text{Si } T = 0, \quad \left\{\begin{array}{lll} \text{il y a } \textit{non-intersection}, & \text{lorsque} & \frac{dT}{da_{33}} < 0, \\ \text{il y a } \textit{intersection}, & \text{lorsque} & \frac{dT}{da_{33}} > 0, \\ \text{il y a } \textit{tangence}, & \text{lorsque} & \frac{dT}{da_{33}} = 0. \end{array}\right.$$

Dans le cas où T est nul, l'intersection se compose de deux droites parallèles, et le contact a lieu suivant une droite qui a pour équations

$$(21) \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} x_2 - \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} x_3 - \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}} x_4 = 0, \\ \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} x_1 - \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} x_3 - \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{14}} x_4 = 0. \end{array}\right.$$

SECONDE HYPOTHÈSE.

$\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ *est nul et* $\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}$ *différent de zéro.*

50. Si l'on remonte à l'équation (4) et qu'on forme le carré par rapport à x_3, il vient

$$X_1^2 - \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2 x_2^2 + \left[\frac{d^2T}{da_{22}da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{22}da_{33}} - \left(\frac{d^2T}{da_{22}da_{34}}\right)^2\right] x_4^2$$
$$-2\left[\frac{d^2T}{da_{22}da_{44}}\,\frac{d^2T}{da_{33}da_{24}} + \frac{d^2T}{da_{44}da_{23}}\,\frac{d^2T}{da_{22}da_{34}}\right] x_2\,x_4 = 0,$$

après avoir posé

$$X_1 = \frac{d^2T}{da_{22}da_{44}}\,x_3 - \frac{d^2T}{da_{44}da_{23}}\,x_2 - \frac{d^2T}{da_{22}da_{34}}\,x_4.$$

Or la première des identités (9) devient

$$(22) \qquad m_1^2\,\frac{dT}{da_{44}} = \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2,$$

ce qui nous montre que $\dfrac{dT}{da_{44}}$ est essentiellement positif.

Si l'on fait intervenir les relations (10) et (22), l'équation précédente deviendra

$$(23) \quad X_1^2 - m_1^2\left(\frac{dT}{da_{44}}\,x_2^2 - 2\,\frac{dT}{da_{24}}\,x_2\,x_4 + \frac{dT}{da_{22}}\,x_4^2\right) = 0.$$

PREMIER CAS. $\dfrac{dT}{da_{44}}$ *est différent de zéro.*

Si l'on pose

$$\frac{dT}{da_{44}}\,X_2 = \frac{dT}{da_{44}}\,x_2 - \frac{dT}{da_{24}}\,x_4,$$

puis qu'on ait égard à la seconde des relations (8), l'équation (23) pourra s'écrire

$$X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{44}} X_2^2 - m_1^2 \frac{T \dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}}{\dfrac{dT}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

Nous avons déjà remarqué que $\frac{dT}{da_{44}}$ était positif; nous voyons donc, à l'inspection de cette dernière équation, qu'il y aura intersection tant que T sera différent de zéro et tangence lorsqu'il sera nul. D'où

(III) $\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ *étant nul*, et $\frac{dT}{da_{44}}$ *différent de zéro*, et alors il est positif :

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Il y a } \textit{intersection}, & \text{lorsque} & T \gtrless 0, \\ \text{Il y a } \textit{tangence}, & \text{lorsque} & T = 0. \end{array}\right.$$

51. Deuxième cas. $\frac{dT}{da_{44}}$ *est nul.*

L'équation (23) devient

$$(24) \qquad X_1^2 - m_1^2 \left(\frac{dT}{da_{22}} x_2^2 - 2 \frac{dT}{da_{24}} x_2 x_4 \right) = 0.$$

La seconde des identités (8) donne

$$(25) \qquad T \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} = - \left(\frac{dT}{da_{24}} \right)^2.$$

Par suite, T et $\frac{dT}{da_{24}}$ s'annuleront en même temps, car $\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}$ est différent de zéro, par hypothèse. Si T n'est pas nul, on voit qu'il y a intersection.

Si

$$T = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{dT}{da_{24}} = 0,$$

on déduit d'abord de la relation (22)

$$\frac{d^2T}{da_{44}\, da_{23}} = 0 ;$$

de la seconde des relations (10)

$$\frac{d^2T}{da_{33}\, da_{24}} = 0 ;$$

et enfin de la seconde des relations (9)

$$\frac{dT}{da_{33}} = 0. \tag{26}$$

En outre la première des relations (8) et la première des relations (14) donneront successivement

$$\frac{dT}{da_{34}} = 0, \quad \frac{dT}{da_{14}} = 0 ;$$

ce qui nous conduit aux équations suivantes pour les projections de la courbe d'intersection sur les plans des $x_2 x_3$ et $x_1 x_3$:

$$\left\{ \begin{aligned} & X_1^2 - m_1^2 \frac{dT}{da_{22}} x_4^2 = 0, \\ & X_1'^2 - m_2^2 \frac{dT}{da_{11}} x_4^2 = 0. \end{aligned} \right. \tag{27}$$

Or la dernière des identités (8) nous donne

$$\frac{dT}{da_{11}} \frac{dT}{da_{22}} = \left(\frac{dT}{da_{12}} \right)^2,$$

puisque $T = 0$; ceci nous indique que $\frac{dT}{da_{22}}$ et $\frac{dT}{da_{11}}$ sont toujours de même signe.

Mais on a, en outre, d'après la quatrième et la cinquième des identités (8),

$$\frac{dT}{da_{23}} = 0, \quad \frac{dT}{da_{13}} = 0;$$

puis d'après (14)

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_1 \frac{dT}{da_{12}} + m_2 \frac{dT}{da_{22}} &= 0, \\ m_1 \frac{dT}{da_{11}} + m_2 \frac{dT}{da_{21}} &= 0. \end{aligned} \right.$$

On voit, d'après ces dernières relations, que $\frac{dT}{da_{22}}$ et $\frac{dT}{da_{11}}$ s'annulent en même temps. Nous pourrons donc tirer des équations (27) les conclusions qui forment la seconde partie du tableau suivant:

(IV) $\qquad \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}$ et $\frac{dT}{da_{44}}$ *étant nuls tous deux.*

Si $T \gtrless 0$, il y a *intersection ;*

$$\text{Si } T = 0, \left\{ \begin{array}{lll} \text{il y a } \textit{non-intersection}, & \text{lorsque } \frac{dT}{da_{22}} < 0, \\ \text{il y a } \textit{intersection}, & \text{lorsque } \frac{dT}{da_{22}} > 0, \\ \text{il y a } \textit{tangence}, & \text{lorsque } \frac{dT}{da_{22}} = 0. \end{array} \right.$$

52. Pour que les conclusions que nous venons de déduire soient légitimes, il faut que les hypothèses admises dans ce dernier cas soient compatibles; ou, en d'autres termes, que les équations (27), qui représentent alors des plans parallèles au plan des $x_1\,x_2$, admettent les mêmes racines; c'est ce que nous allons vérifier.

Les équations (27), ou mieux les équations (4) et (5), deviennent, en ayant égard aux hypothèses actuelles,

$$(27\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 T}{da_{22}\, da_{44}} x_3^2 - 2\dfrac{d^2 T}{da_{22}\, da_{34}} x_3 x_4 + \dfrac{d^2 T}{da_{22}\, da_{33}} x_4^2 = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2 T}{da_{11}\, da_{44}} x_3^2 - 2\dfrac{d^2 T}{da_{11}\, da_{34}} x_3 r_4 + \dfrac{d^2 T}{da_{11}\, da_{33}} x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations admettent les mêmes racines en x_3, il faut et il suffit que

$$(29)\qquad \frac{\dfrac{d^2 T}{da_{22}\, da_{44}}}{\dfrac{d^2 T}{da_{11}\, da_{44}}} = \frac{\dfrac{d^2 T}{da_{22}\, da_{34}}}{\dfrac{d^2 T}{da_{11}\, da_{34}}} = \frac{\dfrac{d^2 T}{da_{22}\, da_{33}}}{\dfrac{d^2 T}{da_{11}\, da_{33}}}.$$

Or des relations (28), puis des relations (16) et des relations analogues obtenues en changeant $\dfrac{dT}{da_{44}}$ en $\dfrac{dT}{da_{33}}$, on déduit immédiatement

$$\frac{dT}{da_{22}} = \lambda \frac{dT}{da_{12}}, \qquad \frac{dT}{da_{11}} = \frac{1}{\lambda} \frac{dT}{da_{21}};$$

$$\frac{d^2 T}{da_{44}\, da_{22}} = \lambda \frac{d^2 T}{da_{44}\, da_{12}}, \qquad \frac{a^2 T}{da_{44}\, da_{11}} = \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 T}{da_{44}\, da_{12}};$$

$$\frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{22}} = \lambda \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{12}}, \qquad \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{11}} = \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{12}};$$

d'où l'on conclut

$$(30)\qquad \frac{\dfrac{dT}{da_{22}}}{\dfrac{dT}{du_{11}}} = \lambda^2, \qquad \frac{\dfrac{d^2 T}{da_{44}\, da_{22}}}{\dfrac{d^2 T}{da_{44}\, da_{11}}} = \lambda^2, \qquad \frac{\dfrac{d^2 T}{da_{33}\, da_{22}}}{\dfrac{d^2 T}{da_{33}\, da_{11}}} = \lambda^2.$$

Si l'on introduit enfin ces dernières relations dans les premières équations des groupes (10) et (12), on arrive à

$$(31)\qquad \frac{\dfrac{d^2 T}{da_{22}\, da_{34}}}{\dfrac{d^2 T}{da_{11}\, da_{34}}} = \lambda^2$$

Les relations (29) se trouvent ainsi vérifiées.

TROISIEME HYPOTHÈSE.

$$\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}=0,\qquad \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}=0,\quad \text{et}\quad \frac{d^2T}{da_{44}\,d_{23}}\gtrless 0.$$

53. L'équation de la projection sur le plan des $x_2 x_3$, qui devient alors

$$\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}x_2x_3+\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}x_2x_4+\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}x_3x_4 -\frac{1}{2}\,\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}x_4^2=0,$$

pourra s'écrire de la manière suivante :

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}x_2+\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}x_4\right)\left(x_3+\frac{\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}}{\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}}x_4\right)\\ &-\frac{2\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}\,\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}+\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{33}}\,\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}}{\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}}x_4^2=0.\end{aligned}\right.$$

Or, de la première des formules (7), on déduit la relation

$$(33)\qquad T\,\frac{d^2T}{da_{23}\,da_{44}}=\frac{dT}{da_{44}}\,\frac{dT}{da_{23}}-\frac{dT}{da_{43}}\,\frac{dT}{da_{24}},$$

qui fournit, en ayant égard aux identités (9) et (10) et aux hypothèses admises, la relation suivante :

$$(34)\quad -m_1^4T=\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\left(2\frac{d^2T}{da_{33}da_{24}}\,\frac{d^2T}{da_{22}da_{34}}+\frac{d^2T}{da_{22}da_{33}}\,\frac{d^2T}{da_{44}da_{23}}\right).$$

L'équation (29) prendra dès lors la forme

$$X_1X_2+\frac{m_1^4\,T}{\left(\dfrac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2}x_4^2=0,$$

d'où l'on conclut immédiatement :

$$(\mathrm{V})\quad \frac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}}\ \textit{et}\ \frac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}}\ \textit{étant nuls, et}\ \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\ \textit{diffèrent de zéro.}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Il y a \textit{intersection}, lorsque } T \lessgtr o;\\ \text{Il y a \textit{tangence}, lorsque } T = o.\end{array}\right.$$

Dans ce cas on a

$$(35)\qquad m_1^2\,\frac{dT}{da_{44}} = \left(\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}}\right)^2,$$

c'est-à-dire que $\frac{dT}{da_{44}}$ est nécessairement positif et ne peut être nul.

Les coordonnées du point de contact sont encore fournies par les équations (18); la vérification en est facile.

Quatrième hypothèse.

$$\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{33}} = o,\quad \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{22}} = o,\quad \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{23}} = o.$$

54. L'équation de la projection sur le plan des $x_2\,x_3$ sera dès lors

$$(36)\qquad \frac{d^2T}{da_{33}da_{24}}\,x_2x_4 + \frac{d^2T}{da_{22}da_{34}}\,x_3x_4 - \frac{1}{2}\,\frac{d^2T}{da_{22}da_{33}}\,x_4^2 = o;$$

c'est l'équation d'une droite. Voyons maintenant ce que devient la projection sur le plan des $x_1\,x_3$.

Les relations (34) et (35) donnent d'abord

$$(37)\qquad \frac{dT}{da_{44}} = o,\quad \text{et}\quad T = o;$$

puis l'on déduit des identités (8)

$$\frac{dT}{da_{34}} = o,\quad \frac{dT}{da_{24}} = o,\quad \frac{dT}{da_{14}} = o;$$

des identités (9) et (10)

$$(38)\qquad m_1^2 \frac{dT}{da_{33}} = \left(\frac{d^2T}{da_{33}\,da_{24}}\right)^2; \quad m_2^1 \frac{dT}{da_{22}} = \left(\frac{d^2T}{da_{22}\,da_{34}}\right)^2;$$

des identités (11) et (13), ou des formules (15)

$$\frac{d^2T}{da_{44}\,da_{13}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{12}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{44}\,da_{11}} = 0.$$

On voit alors que l'équation (5), projection de la courbe d'intersection sur le plan des $x_1\,x_3$, se réduit à

$$(39)\qquad \frac{d^2T}{da_{13}\,da_{14}} x_1\,x_4 + \frac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}} x_3\,x_4 - \frac{1}{2}\frac{d^2T}{da_{11}\,da_{33}} x_4^2 = 0;$$

c'est encore une droite. Le plan coupe la surface suivant une droite; l'autre droite est à l'infini. Cela aura lieu tant que $\frac{dT}{da_{33}}$ et $\frac{dT}{da_{22}}$ ne seront pas nuls à la fois, et, dans ce cas, ils sont nécessairement positifs (35).

Si l'on a à la fois

$$\frac{dT}{da_{33}} = 0, \quad \frac{dT}{da_{22}} = 0,$$

il en résulte des relations (35)

$$\frac{d^2T}{da_{33}da_{24}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{22}da_{34}} = 0,$$

puis des relations (11) et (12)

$$\frac{d^2T}{da_{33}da_{14}} = 0, \quad \frac{d^2T}{da_{11}\,da_{34}} = 0,$$

c'est-à-dire que la première droite est aussi à l'infini; le plan est tangent à l'infini. Ainsi

$$\text{(VI)} \quad \frac{d^2 T}{da_{33}\, da_{44}}, \quad \frac{d^2 T}{da_{22}\, da_{44}}, \quad \frac{d^2 T}{da_{23}\, da_{44}} \text{ \textit{étant nuls},}$$

On a

$$T = 0, \quad \frac{dT}{da_{44}} = 0,$$

et

Il y a *intersection*, lorsque $\frac{dT}{da_{33}}$ et $\frac{dT}{da_{22}}$ ne sont pas nuls à la fois.

Il y a *tangence à l'infini* ou *coïncidence*, lorsque $\frac{dT}{da_{33}} = 0$ et $\frac{dT}{da_{22}} = 0$.

Cinquième hypothèse.

55. Quel que soit le plan donné, un au moins des coefficients m_1, m_2, m_3 n'est pas nul; c'est la ligne correspondante au coefficient non nul que nous conviendrons de placer la *première* dans le déterminant T. Cette précaution étant toujours prise, il en résulte que la quantité m_1 ne saurait être supposée nulle.

Il ne restera donc plus à examiner qu'une seule hypothèse, celle où m_2 est nul, car la valeur de m_3 ne joue aucun rôle dans les discussions précédentes.

Or si $m_2 = 0$, le plan sécant est parallèle à l'axe des x_2, il suffit alors de discuter la projection sur le plan de $x_2\, x_3$, et les résultats obtenus dans les discussions précédentes se maintiendront évidemment.

56. Je vais maintenant résumer les conclusions qui viennent d'être établies, en en présentant le tableau sous divers points de vue.

Premier résumé.

I. $\dfrac{dT}{da_{44}} > 0.$
- *intersection*, lorsque $T \gtrless 0$,
- *tangence*, lorsque $T = 0$.

II. $\dfrac{dT}{da_{44}} < 0.$
- *non-intersection*, lorsque $T\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} > 0$,
- *intersection*, lorsque $T\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} < 0$,
- *tangence*, lorsque $T = 0$.

III. $\dfrac{dT}{da_{44}} = 0.$
- Premier cas. $T \gtrless 0$ .... *intersection*.
- Deuxième cas. $T = 0$.
  - $\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0$,
    - *non-intersection*, si $\dfrac{dT}{da_{33}} < 0$,
    - *intersection*(droites), si $\dfrac{dT}{da_{33}} > 0$,
    - *tangence* (droite), si $\dfrac{dT}{da_{33}} = 0$;
  - $\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} = 0$, et $\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0$,
    - *non-intersection*, si $\dfrac{dT}{da_{22}} < 0$,
    - *intersection*(droites), si $\dfrac{dT}{da_{22}} > 0$,
    - *tangence* (droite), si $\dfrac{dT}{da_{22}} = 0$;
  - $\dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} = 0$, et $\dfrac{d^2T}{da_{22}\,da_{44}} = 0$,
    - *intersection*(droites), si $\dfrac{dT}{da_{33}}$ et $\dfrac{dT}{da_{22}}$ ne sont pas nuls,
    - *tangence à l'infini* ou *coïncidence*, si $\dfrac{dT}{da_{33}} = 0$ et $\dfrac{dT}{da_{22}} = 0$.

Second resumé.

$$\text{I}^{\circ}.\quad T > 0.\ \begin{cases} \dfrac{dT}{da_{44}} > 0 \quad \text{ou} \quad = 0, & \textit{intersection;} \\[2ex] \dfrac{dT}{da_{44}} < 0, & \begin{cases} \textit{non-intersection,} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} > 0, \\[2ex] \textit{intersection} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} < 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{II}^{\circ}.\quad T < 0.\ \begin{cases} \dfrac{dT}{da_{44}} > 0 \quad \text{ou} \quad = 0, & \textit{intersection;} \\[2ex] \dfrac{dT}{da_{44}} < 0, & \begin{cases} \textit{non-intersection,} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} < 0, \\[2ex] \textit{intersection,} & \text{si } \dfrac{d^2T}{da_{33}\,da_{44}} > 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{III}^{\circ}.\quad T = 0.\ \begin{cases} \dfrac{dT}{da_{44}} \gtrless 0, & \textit{tangence,} \\[2ex] \dfrac{dT}{da_{44}} = 0, & \text{(Tableau du 2}^{\text{e}}\text{ cas, III}^{\circ}\text{, résumé précédent.)} \end{cases}$$