MICHAEL ROBERTS

# Note sur les équations du quatrième degré

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 18 (1859), p. 87-89

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__87_0>

# NOTE SUR LES ÉQUATIONS DU QUATRIEME DEGRE;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt les remarques que M. Lebesgue vient de publier dans les *Nouvelles Annales* (t. XVII, p. 384-391) sur la résolution des équations biquadratiques, et aussi la Note de M. Aronhold qui se rapporte au même sujet. Dans ce qui suit, je me propose de faire voir comment la solution de ce dernier peut être ramenée à celle d'Euler. Pour cela je donne l'énoncé du théorème suivant sur les déterminants, qu'on peut démontrer facilement. Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & & x_1 & x_2 \\ \ldots & & & \ldots & \\ x_n & x_1 & & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

On sait que $\Delta$ a pour facteurs les valeurs que prend la fonction

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \ldots + \omega^{n-1} x_n,$$

en substituant pour $\omega$ successivement les racines de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0. \text{ (*)}$$

(*) Si les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont disposés symétriquement, alors il faut que $n$ soit un nombre impair.

Considérons maintenant l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

et posons

$$a^2\varpi = b^2 - ac,$$

$$12a^2\mu = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$8a^3\lambda = ace + 2bed - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$l = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

$$m = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

et si $\Delta$ représente le déterminant de M. Aronhold, on a (en écrivant dans son équation $\theta$ au lieu de $\lambda$)

$$\begin{vmatrix} \frac{\theta}{a} & -l^{\frac{1}{3}} & -m^{\frac{1}{3}} \\ -l^{\frac{1}{3}} & -m^{\frac{1}{3}} & \frac{\theta}{a} \\ -m^{\frac{1}{3}} & +\frac{\theta}{a} & -l^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta}{a^3},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{d\Delta}{dc} = -a\varpi + \theta.$$

Mais si $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont les racines de l'équation

$$\Delta = 0,$$

nous tirons, en vertu du théorème que je viens d'énoncer,

$$\frac{\theta_1}{a} = l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\theta_2}{a} = \omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\theta_3}{a} = \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}}$$

($\omega$ est une racine cubique imaginaire de l'unité), en sorte que

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\Delta}{dl}\right)_1 = -\varpi + l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\Delta}{dl}\right)_2 = -\varpi + \omega\, l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\Delta}{dl}\right)_3 = -\varpi + \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega\, m^{\frac{1}{3}}.$$

Or les seconds membres de ces dernières équations sont précisément les racines de la réduite du troisième degré dans la méthode d'Euler.