BEYNAC

Question d'examen à l'École polytechnique (1858)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 85-86

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__85_0>

QUESTION D'EXAMEN A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1858);

PAR M. BEYNAC,
Professeur

Si l'on fait tourner un angle droit dont le sommet est sur une courbe du second ordre, et que dans chacune de ces positions on joigne les points d'intersection des côtés de l'angle avec la courbe, par des droites, toutes ces droites vont se couper au même point de la normale à la courbe passant par le sommet de l'angle droit.

SOLUTION.

Si on rapporte la courbe à la tangente au sommet fixe et à la normale qui passe par le même point, son équation est

$$(1) \qquad y^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0,$$

car la courbe passe par l'origine, et pour $x = 0$, y doit passer deux fois par zéro.

Soit $y - mx = 0$ l'équation de l'un des côtés OA de l'angle, $y + \frac{1}{m}x = 0$ est celle de l'autre côté OB.

Le produit

$$(2) \qquad y^2 - \left(m - \frac{1}{m}\right)xy - x^2 = 0$$

représente le système des deux droites OA, OB. La différence des équations (1) et (2) est celle d'un lieu passant par un point commun aux deux premiers. Cette équation est

$$\left(B + m - \frac{1}{m}\right)xy + (C + 1)x^2 + Ex = 0.$$

Divisant par x, on supprime $x = 0$ qui représente l'axe des y, et l'on a

$$\left(B + m - \frac{1}{m}\right) y + (C + 1) x + E = 0,$$

ou l'équation de la droite AB. Pour $y = 0$, on trouve

$$x = -\frac{E}{C + 1} = \text{constante}$$

et indépendante de m, ce qui justifie le théorème.

Remarque I. On déduit de là un moyen très-simple de construire une normale ou une tangente en un point donné d'une courbe du second ordre en ne faisant usage que de l'équerre.

Remarque II. Le résultat précédent s'appuie sur ce seul fait que dans l'équation (2) le coefficient de x^2 est constant et égal à -1. Or ce coefficient provient du produit des coefficients angulaires des droites OA, OB. Le théorème subsiste lors même que l'angle AOB n'est pas constant; il suffit que le produit des coefficients angulaires des droites qui forment l'angle soit constant. C'est ce qui arrive quand le point O est le centre d'une courbe du second ordre et qu'on mène par ce point des systèmes de diamètres conjugués.

Remarque III. On voit aussi les avantages qu'il y a à rapporter une courbe à la tangente et à la normale correspondante.

Note du Rédacteur. Le théorème appartient à Fregier (*Annales* de Gergonne, t. VI, p. 229, 1816; *Nouvelles Annales*, t. II, p. 186, 1843). Il y a un théorème analogue pour les surfaces du second degré. En général, toute corde inscrite dans une conique enveloppe une conique, lorsqu'elle est vue d'un point fixe sous un angle constant (Poncelet); ce point étant sur la conique et l'angle étant droit, la conique enveloppe se réduit à un point.