LEBESGUE

Sur la valeur de la somme $\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} + \cdots + \frac{1}{\ell^m}$, $a, b, \ldots, \ell$ étant les termes d'une progression arithmétique croissante

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 82-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__82_0>

SUR LA VALEUR DE LA SOMME

$$\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}+\ldots+\frac{1}{l^m},$$

a, b,. ., l étant les termes d'une progression arithmétique croissante;

Par M. LEBESGUE.

Maintenant que les dérivées sont introduites dans les cours de mathématiques, et que par suite les aires paraboliques et hyperboliques se déterminent en passant d'une dérivée à la fonction primitive, peut-être conviendrait-il, à l'article des séries, de déduire la règle de convergence et de divergence de la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots \text{ à l'infini}$$

de la considération de l'aire d'un segment compris entre la courbe d'équation $y=\frac{1}{x^m}$, l'axe des x et deux ordonnées.

Tout en obtenant la règle de convergence et de divergence, qui reste la même quand $1, 2, 3,\ldots,$ sont remplacés par a, $a+\delta$, $a+2\delta,\ldots,$ l'on aurait la valeur approchée d'un nombre limité de termes consécutifs.

Pour $y=\frac{1}{x}$ (coordonnées rectangulaires), l'aire est

$$\log\frac{l}{a},$$

pour $y=\frac{1}{x^m}$ l'aire est

$$\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{a^{m-1}}-\frac{1}{l^{m-1}}\right].$$

Si maintenant on fait $l=a+(n-1)\delta$, et que l'on nomme $y_1, y_2, y_3,\ldots, y_n$ les coordonnées équidistantes qui répondent aux abscisses $x_1=a$, $x_2=a+\delta$, $x_3=a+2\delta,\ldots,$

$x_n = a + (n-1)\delta$, l'aire du polygone formé en joignant les points de la courbe qui correspondent aux abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera

$$\delta[y_1 + y_2 + \ldots + y_n] - \frac{1}{2}\delta(y_1 + y_n).$$

Cette aire se compose, 1° de l'aire hyperbolique déterminée plus haut ; 2° d'une somme de segments formés par les cordes qui unissent les sommets consécutivement deux à deux, somme toujours bien plus petite que $\frac{1}{2}(y_1 - y_n)$, ce qui se voit immédiatement sur la figure. On aura, en représentant par S cette somme de segments, 1° pour $m = 1$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \ldots + y_n &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{l} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l}\right) + \frac{1}{\delta}\mathrm{S} + \frac{1}{\delta}\log\frac{l}{a}; \end{aligned}$$

2° quel que soit m

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \ldots + \frac{l}{l^m} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{l^m}\right) \\ &+ \frac{1}{\delta}\mathrm{S} + \frac{1}{(m-1)\delta}\left[\frac{1}{a^{m-1}} - \frac{1}{l^{m-1}}\right]. \end{aligned}$$

Pour $m = 1$, l et $\log l$ devenant infinis, la série $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ldots$, prolongée indéfiniment, est divergente.

Pour $m < 1$, le terme $-\frac{1}{(m-1)\delta}\cdot\frac{1}{l^{m-1}}$ devient $\frac{l^{1-m}}{\delta(1-m)}$, c'est-à-dire infini aussi bien que l, il y a encore divergence.

Pour $m > 1$, $\frac{1}{l^{m-1}}$ tend vers zéro, et il y a convergence quand l tend vers l'infini.

Cette démonstration, qui est bien connue, pourrait être introduite dans les Éléments. Si je la donne ici, c'est pour avoir occasion de faire remarquer qu'il y a un vice de rédaction à la page 465 des *Nouvelles Annales*, 1858.

La formule à employer est celle d'Euler :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\mathrm{C}+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{\mathrm{A}}{4n^2}+\frac{\mathrm{B}}{6n^4}-\ \ldots,$$

où $\mathrm{C}=0,577,\ldots$; A, B, C... étant les nombres de Bernoulli.

La formule exposée plus haut donne

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=0,5+\log n+\frac{1}{2n}+\mathrm{S}.$$

En négligeant S, la valeur $0,5+\log n+\frac{1}{2n}$ diffère peu de celle d'Euler.

Comme on a aussi

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a}=0,5+\log a+\frac{1}{2a}+\mathrm{S}_1,$$

d'où

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a-1}=0,5+\log a-\frac{1}{2a}+\mathrm{S}_1;$$

il en résulte

$$\frac{1}{a}+\ldots+\frac{1}{n}=\frac{1}{2a}-\log a+\log n+\frac{1}{2n}+\mathrm{S}-\mathrm{S}_1$$

et

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a-1}$$
$$+\frac{1}{2a}-\log a+\log n+\frac{1}{2n}+(\mathrm{S}-\mathrm{S}_1).$$

Pour $a=20$ on aurait, en négligeant $\mathrm{S}-\mathrm{S}_1$,

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=0,577\ldots+\log n+\frac{1}{2n},$$

qui diffère à peine de celle d'Euler. Mais cette dernière a l'avantage d'être un cas particulier d'une importante formule générale, qui introduit dans le calcul des séries les nombres de Bernoulli (*Calcul différentiel*, chap. V).