NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TERQUEM

Solution de la question 443

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 77-81

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__77_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 443

(voir t. XVII, p. 262),

PAR M. A. TERQUEM,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

Par un point fixe donné dans le plan d'une conique passe une sécante mobile, trouver le lieu géométrique du point d'intersection des deux normales menées à la conique aux deux points où la sécante coupe la conique. Quel est le lieu lorsque le point fixe est un foyer?

Démonstration. Prenons le point pour origine et rapportons la courbe à des parallèles aux axes principaux; l'équation de la conique sera de la forme

$$(1)\qquad Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

l'équation de la sécante est

$$y = ax.$$

Les abscisses x', x'' des points d'intersection seront données par les racines de l'équation

$$(2)\qquad x^2(Aa^2 + C) + x(Da + E) + E = 0.$$

Les ordonnées de ces points ont pour valeurs

$$y' = ax',$$

$$y'' = ax'',$$

Les équations des deux normales qui passent par les points (x', y'), (x'', y'') sont de la forme

$$y - y' = \frac{2Ay' + D}{2Cx' + E}(x - x'),$$

$$y - y'' = \frac{2Ay'' + D}{2Cx'' + E}(x - x'').$$

Pour avoir les coordonnées des points d'intersection de ces droites, égalons les deux valeurs de x et aussi celles de y, on obtient ainsi deux équations qui donnent les coordonnées X et Y du point d'intersection en fonction de (x', y') (x'', y'') et du paramètre variable a. Remplaçant y' et y'' par leurs valeurs ax' et ax'', on trouve

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(2Ax' + D)(x - x') + (2Cx' + E)\,ax'}{2Cx' + E} \\ &= \frac{(2Ax'' + E)(x - x'') + (2Cx'' + E)\,ax''}{2A\,ax'' + E}, \end{aligned} \right.$$

puis

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(2Cx' + E)(y - ax') + (2A\,ax' + D)\,x'}{2A\,ax' + D} \\ &= \frac{(2Cx'' + E)(y - ax'') + (2A\,ax'' + D)\,x''}{2A\,ax'' + D}. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (3) et (4) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} &2AEa(x - x' - x'') + 4Cax'x''(C - A) \\ &+ 2C[Ea(x' + x'') - Dx] + E(Ea - D) \end{aligned} \right\}(x' - x'') = 0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} &2CD[y - a(x' + x'')] + 4Aa^2x'x''(A - C) \\ &+ 2Aa[D(x' + x'') - Ey] + D(D - Ea) \end{aligned} \right\}(x' - x'') = 0.$$

Ces deux équations divisibles par $(x' - x'')$ ne contiennent plus que la somme des racines $(x' + x'')$ et le produit $x'x''$, auxquels on substituera leur valeur tirée de l'équation (2)

$$x' + x'' = -\frac{Da + E}{Aa^2 + C}, \quad x'x'' = \frac{F}{Aa^2 + C}.$$

Chassant le dénominateur, on obtient deux équations du troisième degré en ordonnant par rapport à a :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} a^3[AE(2Ax + E)] + a^2[ADE - 2CD(Ax + E)] \\ + a[2ACEx + 4CF(C - A) + E^2(2A - C)] \\ - CD(2Cx + E) = 0. \end{array} \right.$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} a^3[AE(2Ay + D)] \\ + a^2[4AF(C - A) + D^2(A - 2C) - 2ACDy] \\ + a[2ACEy + DE(2A - C)] \\ - CD(2Cy + D) = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de a entre ces deux équations donne l'équation du lieu qui semble devoir être du sixième degré d'après une formule donnée par Bezout ; mais elle ne monte qu'au troisième degré, à cause de la symétrie des coefficients.

Si a, b, c, d sont les coefficients de la première équation et a', b', c', d' ceux de la seconde, l'équation résultant de l'élimination sera

$$\begin{array}{l} [(ab').(bc') - (ac')^2 + (ad').(ab')](cd') \\ - [(ab').(bd') - (ac').(ad')](bd') \\ + [(ab')(cd') - (ad')^2](ad') = 0 \quad (*). \end{array}$$

Chacun de ces déterminants $(ab' - ba')$, $(bc' - cb')$, etc., ne monte qu'au premier degré parce que les coefficients des termes du second degré sont égaux deux à deux et de

(*) BEZOUT, *Théorie générale des équations algébriques*, p. 301 ; 1779. J'ai donné cette indication. TM.

signes contraires; donc la courbe cherchée est du troisième ordre.

2. Cherchons ce que devient le lieu lorsque le point est au foyer.

L'équation générale est, en prenant pour axe celui de la courbe et l'origine au foyer,

$$y^2 + x^2(1 - k^2) - 2pk^2x - p^2k^2 = 0,$$

p désigne la distance du foyer à la directrice et k le rapport des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice.

Faisons, dans les équations (5) et (6),

$$A = 1, \quad C = (1 - k^2), \quad D = 0,$$
$$E = -2pk^2, \quad F = -p^2k^2,$$

la première devient

$$a^2(pk^2 - x) - (1 - k^2)x - 12pk^4 = 0,$$

et la seconde

$$a^2y - apk^2 + (1 - k^2)y = 0.$$

Éliminant a entre ces deux équations, nous aurons

$$y^2(1 - 3k^2)^2 = (1 - k^2)(pk^2 - x)x - 2pk^2(pk^2 - x).$$

Le caractère

$$B^2 - 4AC = -4(1 - 3k^2)^2(1 - k^2)$$

donc la courbe peut présenter les trois variétés des coniques et est de même espèce que celle dont elle provient.

Si l'on prend pour équation de la courbe

$$a^2y^2 + b^2(x - c)^2 - a^2b^2 = 0,$$

l'équation du lieu deviendra, en remplaçant k par $\frac{c}{a}$ et

p par $\frac{b'}{c}$,

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} y^2(b^2-2c^2)^2+a^2b^2x^2-cx(b^4+2a^2b^2) \\ \qquad +2b^4c^2=0. \end{array} \right.$$

La coordonnée du centre est

$$X=\frac{c(b^2+2a^2)}{2a^2}.$$

Le grand axe et le petit axe s'obtiennent en prenant la moitié de la différence des racines de l'équation (7) et en mettant la valeur de X dans la même équation, Y donnera le petit axe.

Ainsi

$$a'=\frac{c(2a^2-b^2)}{2a^2},$$

$$b'=\frac{bc(2a^2-b^2)}{2a(2c^2-b^2)}.$$

Pour passer de l'ellipse à l'hyperbole, il suffira de changer b^2 en $-b^2$.

Pour une parabole dont l'équation est

$$y^2=p(2x-p),$$

l'équation du lieu sera

$$y^2=\frac{h}{2}(x-p).$$

Note. Si dans l'équation (7) on fait

$$y=0,$$

on trouve

$$x=2c;$$

ainsi la conique passe par le second foyer.

Annulant une des quantités A, C, D, E le lieu devient une conique.