

ASTIER

Seconde solution de la question 453

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 71-72

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__71_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 453 ;

PAR M. ASTIER, DE LYON.

Dans la formule connue

$$\log p = \lim \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{pn} \right)$$

considérons la suite

$$S_k = \frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \dots + \frac{1}{(k+n)n}.$$

On a évidemment à la limite

$$\log p = S_2 + \dots + S_k + \dots + S_p.$$

Si l'on fait la somme deux à deux des termes équidistants

(*) Cette remarque appartient à M. Michaux

(72)

des extrêmes, le numérateur sera constant et égal à

$$kn + (k + 1)n,$$

le dénominateur sera toujours plus grand que

$$kn \times (k + 1)n$$

et plus petit que

$$\left[\frac{k + n + 1}{2} n \right]^2.$$

Donc

$$\frac{(2k + 1)n}{(2k + 1)^2 n^2} (n + 1) < 2S_k < \frac{(2k + 1)n}{k(k + 1)n^2} (n + 1),$$

et, en remplaçant $n + 1$ par n , ce qui est permis, à la limite

$$\frac{2}{2k + 1} < S_k < \frac{2k + 1}{k(k + 1)},$$

ou, à fortiori,

$$\frac{1}{k + 1} < S_k < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k + 1} \right).$$

Donc

$$\log p > \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}$$

et

$$\log p < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2p} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1},$$

d'où l'on conclut

$$\log(n + 1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$
