NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ASTIER

Seconde solution de la question 453

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 71-72

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__71_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 453 ;

PAR M. ASTIER, DE LYON.

Dans la formule connue

$$\log p = \lim \left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{pn}\right)$$

considérons la suite

$$S_k = \frac{1}{kn} + \frac{1}{kn+1} + \ldots + \frac{1}{(k+n)n}.$$

On a évidemment à la limite

$$\log p = S_2 + \ldots + S_k + \ldots + S_p.$$

Si l'on fait la somme deux à deux des termes équidistants

(*) Cette remarque appartient à M. Michaux.

des extrêmes, le numérateur sera constant et égal à

$$kn + (k+1)n,$$

le dénominateur sera toujours plus grand que

$$kn \times (k+1)n$$

et plus petit que

$$\left[\frac{k+n+1)n}{2}\right]^2.$$

Donc

$$\frac{(2k+1)n}{\frac{(2k+1)^2 n^2}{4}}(n+1) < 2S_k < \frac{(2k+1)n}{k(k+1)n^2}(n+1),$$

et, en remplaçant $n+1$ par n, ce qui est permis, à la limite

$$\frac{2}{2k+1} < S_k < \frac{2k+1}{k(k+1)},$$

ou, à fortiori,

$$\frac{1}{k+1} < S_k < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

Donc

$$\log p > \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}$$

et

$$\log p < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2p} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1},$$

d'où l'on conclut

$$\log(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$