NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. STEINER

Théorèmes divers et problèmes sur les courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 61-64

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__61_0>

THÉORÈMES DIVERS
ET PROBLÈMES SUR LES COURBES PLANES

(voir t. XVII, p 443);

PAR M. J. STEINER.

13. THÉORÈME X. p *est un point dans le plan d'un triangle* ABC. *On peut circonscrire au triangle une conique* P^2, *et y inscrire une conique* P_1^2, *qui aient chacune pour centre le point* p. *Les deux coniques sont toujours de même* espèce, *deux ellipses, deux hyperboles ou deux paraboles. Si dans les deux coniques les produits des axes sont égaux, le lieu du point* p *est formé de deux courbes du troisième ordre, savoir :*

1°. P^3 : les trois asymptotes passent par le centre de gravité du triangle ABC et sont des tangentes d'*inflexion*, et parallèles aux côtés du triangle. Les trois branches hyperboliques de la courbe P^3 sont dans les espaces extérieurs au triangle et touchent ses côtés au milieu; P^3 est le lieu des centres des hyperboles.

2°. P_1^3 : cette courbe est formée de deux parties; l'une fermée, *ovale*, et l'autre consiste en trois branches hyperboliques; l'ovale est dans l'intérieur du triangle et touche ses côtés au milieu, et à chaque point de cet ovale correspondent des hyperboles; les trois branches infinies ont pour asymptotes les côtés du triangle circonscrit au triangle ABC, parallèlement à ses côtés, et sont situées dans les angles de ce triangle; chaque point de ces branches correspond à des ellipses; l'ovale est dans l'intérieur de l'ellipse, qui touche aussi les trois côtés des triangles aux milieux A', B', C'.

Les trois segments de l'ovale, au-dessus des cordes A′ B′, B′ C′, C′ A′, sont *équivalents*, de même que les segments de l'ellipse.

14. PROBLÈMES. *Quelle est l'aire de l'ovale?*

15. *Quel est le lieu du point* p, *lorsque les deux coniques doivent être semblables? Le lieu est-il formé d'une ligne du quatrième ordre et de quatre droites?*

16. THÉORÈME. XI. *Soient un triangle* ABC *avec une conique* P^2 *circonscrite et une conique inscrite* P^2_1, *et ayant même centre* p, *il y aura une infinité d'autres triangles inscrits et circonscrits simultanément* (Poncelet); *soit* $A_1 B_1 C_1$ *un* quelconque *de ces triangles*, m *le centre d'un cercle circonscrit à ce triangle et* r *le rayon; α, β, γ les perpendiculaires abaissées du centre commun* p *aux trois côtés du triangle* $A_1 B_1 C_1$; a, b *les demi-axes de* P^2, *et* a′, b′ *les demi-axes de* P^2_1, *on a la relation*

$$2r\,\alpha\beta\gamma = ab\,a'\,b'.$$

A′, B′, C′ étant les milieux des côtés. Soient α', β', γ' les distances de p aux côtés du triangle A′ B′ C′, on a la relation

$$4r\alpha'\beta'\gamma' = a'^2 b'^2.$$

17. Si

$$a = b = r,$$

alors

$$2\alpha\beta\gamma = a_1 b_1 (a_1 \pm b_1);$$

de là ce théorème :

THÉORÈME XII. *Si du centre* p *d'une ellipse on décrit un cercle d'un rayon égal à la somme ou à la différence des deux demi-axes, on peut inscrire une infinité de triangles dans le cercle et circonscrits à l'ellipse.*

Observation. Steiner considère ensuite le cas où le cercle est inscrit et l'ellipse circonscrite.

18. Théorème XIII. *Le lieu des centres des coniques semblables circonscrites à un triangle donné est une ligne du quatrième degré ayant les milieux des côtés pour points* doubles ; *l'enveloppe de ces coniques est encore une courbe du quatrième degré ayant les sommets du triangle pour* points doubles *et n'a que quatre tangentes doubles.*

Il n'y a pas deux coniques *homothètes.*

Quel est le lieu des foyers? Quelle est l'enveloppe des axes des coniques?

19. Théoreme XIV. *Les lieux des centres des coniques semblables inscrites à un triangle est une ligne du quatrième ordre; si les coniques sont des ellipses, la courbe lieu des centres est formée de quatre branches ovales. Si les coniques sont des paraboles, la courbe se réduit à quatre droites dont l'une est située à l'infini, et les trois droites passent par les milieux des côtés du triangle donné.*

Quelle est l'enveloppe de ces courbes? le lieu des foyers? l'enveloppe des axes?

En général, on peut inscrire dans un triangle quatre coniques semblables à une conique donnée et homothètes avec cette conique; ainsi toutes les coniques inscrites peuvent se partager en groupes chacun de quatre coniques homothètes. Si ce sont des ellipses, alors les quatre centres dans un groupe sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les trois couples de côtés opposés passent par les sommets du triangle.

Le produit des demi-axes de ces quatre ellipses est le même pour tous les groupes et égal à la quatrième puissance de l'aire du triangle donné.

Ces quatre ellipses touchent chaque côté en quatre points a', b', c', d', dont deux b', c' sont entre A et B; a de l'autre côté de A et d' de l'autre côté de B; et l'on a

$$\mathrm{A}a' = \mathrm{B}d',\quad \mathrm{A}d' = \mathrm{B}a',\quad \mathrm{A}b' = \mathrm{B}c',\quad \mathrm{A}c' = \mathrm{B}b'.$$

Désignant ces quatre distances par a_0, b_0, c_0, d_0, et les distances des quatre centres au côté AB par e_1, e_2, e_3, e_4, on a

$$a_0\, b_0\, c_0\, d_0\, e_1\, e_2\, e_3\, e_4 = \Delta^4,$$

Δ est l'aire du triangle.

Si l'on circonscrit au triangle quatre ellipses ayant respectivement même centre que les quatre ellipses homothètes inscrites , le produit des demi-axes des quatre ellipses circonscrites divisé par le produit des demi-axes des ellipses inscrites donne un quotient constant.

Mêmes propositions pour l'hyperbole.