LE BESGUE

Remarques sur quelques séries (suite)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 460-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__460_0>

REMARQUES SUR QUELQUES SÉRIES (suite)

(voir page 433);

PAR M. LE BESGUE.

7. Si dans le développement de e^x on change x en $x\sqrt{-1}$, on trouve, au moyen des formules (5) qui reviennent à

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

l'équation

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}.\sin x;$$

de même en changeant x en $-x\sqrt{-1}$, on trouve

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}.\sin x,$$

et par suite

$$\cos x = \frac{1}{2}\left\{ e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \right\},$$

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left\{ e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}} \right\}.$$

Ces expressions, où les imaginaires se détruisent, conduisent très-brièvement à des résultats qui demanderaient de longs calculs, si l'on voulait éviter l'emploi des imaginaires, symboles d'une grande utilité, qui voilent à la vérité les opérations pour n'en montrer que les résultats.

8. Les formules (8) de l'article 4 peuvent se mettre

sous la forme

$$Cx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$Sx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

de là

$$C(x \pm y) = Cx.Cy \pm Sx\ Sy,$$
$$S(x \pm y) = Sx.Cy \pm Cx.Sy,$$

et une foule d'autres.

L'expression Cx est un *cosinus hyperbolique*, Sx est un *sinus hyperbolique*. On voit que ce sont les coordonnées d'un certain point de l'hyperbole équilatère dont l'équation est

$$x^2 - y^2 = 1.$$

On a formé des Tables pour ces sinus et cosinus et pour leurs logarithmes. Elles résolvent des problèmes analogues à ceux dont la solution se tire des Tables trigonométriques ordinaires. Un exemple très-simple est la résolution de l'équation du troisième degré pour le cas d'une seule racine réelle. Chacun le développera facilement.

N. B. A la page 433, ligne 3 en remontant, il y a une faute de signe, il faut lire $-\frac{2}{\Pi 1 . \Pi 2m}$.

A la page 435, ligne 10, *au lieu de* un arc de la courbe, *il faut lire* l'arc de la courbe compris entre le sommet et le point dont les coordonnées sont x_1 et y_1.