J. Murent

Solution géométrique de la question 417

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 451-459
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__451_1>

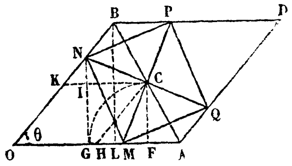
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 417

(voir t. XVII, p. 31);

PAR M. J. MURENT, DE CLERMONT.
Licencié ès Sciences.

A quelles conditions doivent satisfaire les côtés et les angles d'un parallélogramme pour qu'il soit possible d'inscrire un carré dans ce parallélogramme?

FIG. 1.



I. Soit un carré MNPQ inscrit dans un parallélogramme OADB. Les triangles MAQ et NBP sont égaux, car le côté $MQ = NP$ et les angles sont égaux chacun à chacun, comme ayant les côtés parallèles; donc les lignes MA et BP sont égales et parallèles; par suite, les lignes MP, AB se coupent en leurs milieux, et il en est de même des lignes NQ et AB.

Ainsi, les diagonales du carré et celles du parallélogramme se coupent en un même point C. On sait aussi que les diagonales du carré sont égales et perpendiculaires entre elles.

Cela posé, menons CK et CH parallèles à OA et OB, puis abaissons sur OA les perpendiculaires CF, BL et NG; cette dernière rencontrant CK au point I. Les triangles rectangles CMF, CNI sont égaux, car les hypoténuses CM et CN sont égales comme demi-diagonales d'un carré, et les angles MCF, NCI, ayant même complément ICM, sont égaux. On a donc

$$CF = CI = FG,$$

et la figure CIGF est un carré. On trouvera la même propriété en abaissant des points C, A, M, des perpendiculaires sur OB.

De là résulte cette construction simple du carré inscrit dans un parallélogramme donné OADB : Par le point de rencontre C des diagonales du parallélogramme, abaissez la perpendiculaire CF sur un des côtés OA; portez la longueur CF en FG sur ce côté, et par le point G élevez sur OA une perpendiculaire qui rencontre l'autre côté OB en un point N. Menant ensuite par ce point N la ligne NCQ, et par le point C la perpendiculaire MCP; joignant enfin deux à deux les points M, N, P, Q où ces deux lignes rencontrent les côtés du parallélogramme; la figure MNPQ ainsi formée sera un carré inscrit.

En effet, si l'on mène à OA la parallèle CI et la perperpendiculaire CF, les triangles rectangles CNI, CMF sont égaux, car les côtés CI, CF sont égaux par construction, et les angles NCI, MCF ayant même complément, sont égaux. Donc $CN = CM$, et l'on prouvera facilement que la figure MNPQ est un carré.

II. Désignons par θ l'angle AOB (*fig.* 1), que nous supposerons toujours un des angles aigus du parallélogramme; posons

$$OA = 2a \quad \text{et} \quad OB = 2b;$$

d'où résulte

$$CK = OH = HA = a, \quad CH = b,$$

et abaissons BL perpendiculaire sur OA. Pour qu'il soit possible d'inscrire un carré dans le parallélogramme OADB, il faut et il suffit que les points M et N déterminés par la construction précédente tombent sur les côtés OA et OB, et non pas sur leurs prolongements.

Or, d'après cette construction, pour que le point N se trouve entre O et B, il faut qu'en portant FC en FG, le point G tombe entre O et L : ce qui exige que l'on ait à la fois

$$CF > FL \quad \text{et} \quad CF < FO.$$

Mais comme on a

$$CF = CH \sin\theta = b \sin\theta, \quad FL = FA = HA - HF = a - b\cos\theta,$$
$$FO = OH + HF = a + \cos\theta,$$

ces inégalités deviennent

$$b\sin\theta > a - b\cos\theta \quad \text{et} \quad b\sin\theta < a + b\cos\theta,$$

ou enfin

$$a < b(\sin\theta + \cos\theta), \tag{1}$$
$$a > b(\sin\theta - \cos\theta). \tag{2}$$

Comme le sommet M pourrait être déterminé par une construction identique à celle qui a donné le point N, les conditions pour que le point M se trouve entre O et A, seront

$$b < a(\sin\theta + \cos\theta), \quad b > a(\sin\theta - \cos\theta),$$

et pourront s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad a > \frac{b}{\sin\theta + \cos\theta},$$

$$(4) \qquad a < \frac{b}{\sin\theta - \cos\theta}.$$

Je dis maintenant que les quatre conditions (1), (2), (3), (4) se réduisent à deux. En effet,

1°. Si l'on a

$$\theta < 45°, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta > \sin\theta,$$

les inégalités (2) et (4), mises sous la forme

$$a + b(\cos\theta - \sin\theta) > 0, \quad b + a(\cos\theta - \sin\theta) > 0,$$

sont toujours satisfaites, et il ne reste que les conditions (1) et (3).

2°. Si l'on a

$$\theta > 45°, \quad \text{d'où} \quad \sin\theta > \cos\theta,$$

la relation évidente

$$\sin^2\theta - \cos^2\theta < 1$$

donne, en divisant par $\sin\theta + \cos\theta$,

$$\sin\theta - \cos\theta < \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta},$$

et, par suite, l'inégalité (3) entraîne l'inégalité (2). De même la relation

$$\sin\theta + \cos\theta < \frac{1}{\sin\theta - \cos\theta}$$

montre que l'inégalité (1) entraîne l'inégalité (4).

Donc enfin toutes les conditions demandées sont renfermées dans les deux relations

$$(1) \qquad a \leqq b(\sin\theta + \cos\theta),$$

$$(3) \qquad a \geqq b\,\frac{b}{\sin\theta + \cos\theta}.$$

Ces deux dernières inégalités sont d'ailleurs compatibles, car l'angle θ étant aigu, on a

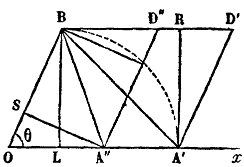
$$\sin\theta > 0, \quad \cos\theta > 0, \quad \sin\theta + \cos\theta > 1,$$

et, par suite,

$$b(\sin\theta + \cos\theta) > \frac{b}{\sin\theta + \cos\theta}.$$

Nous allons maintenant interpréter ces résultats.

FIG. 2.



III. Supposons d'abord que l'angle BOx et l'un des côtés $OB = 2b$ du parallélogramme soient donnés (*fig.* 2). Les relations (1) et (3) indiqueront les limites entre lesquelles devra être compris l'autre côté $2a$, pour qu'il existe un carré inscrit.

Afin de construire ces limites, abaissons BL perpendiculaire sur Ox et portons BL en LA'; OA' sera la longueur maximum du côté $2a$, car on aura

$$OA' = OL + LA' = OL + BL = 2b(\cos\theta + \sin\theta).$$

Menant ensuite par le point B la droite BA'', de manière que l'angle $OBA'' = 45°$, la longueur OA'' sera la limite inférieure du côté $2a$; car en abaissant $A''S$ perpendiculaire sur OB, on aura

$$SB = SA'',$$

et, par suite,

$$2b = OS + SB = OS + SA'' = OA''(\cos\theta + \sin\theta),$$

d'où

$$OA'' = \frac{2b}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

On obtient ainsi deux parallélogrammes-limites $BOA'D'$, $BOA''D''$. La construction d'un sommet du carré inscrit montre que, dans chacun de ces parallélogrammes-limites, le carré inscrit est le carré ayant pour diagonale la plus petite diagonale du parallélogramme.

En prenant pour le sommet A un point quelconque situé entre A'' et A', on déterminera une infinité de parallélogrammes dans lesquels on pourra inscrire un carré.

Dans le cas particulier où $\theta = 90°$, les conditions (1) et (3) donnent $a = b$, c'est-à-dire que le parallélogramme doit être un carré. La construction d'un sommet du carré inscrit montre qu'on peut prendre pour ce sommet un point quelconque du côté du carré donné, et l'on trouve ainsi cette propriété connue : Que dans un carré donné, on peut inscrire une infinité de carrés.

Si l'on a $\theta = 45°$, les conditions (1) et (3) se réduisent à

$$a < b\sqrt{2}, \quad a \geqq \frac{1}{2} b\sqrt{2}.$$

Les parallélogrammes-limites sont doubles l'un de l'autre, et chacun d'eux est double du carré inscrit.

IV. Supposons donnés les deux côtés $2a$ et $2b$. Les relations (1) et (3), écrites sous la forme

$$\sin\theta + \cos\theta \geqq \frac{a}{b}, \quad \sin\theta + \cos\theta \geqq \frac{b}{a},$$

se réduisent à une seule

$$(5) \qquad \sin\theta + \cos\theta \geqq \frac{a}{b},$$

en supposant $a > b$. Mais comme on sait que le maximum de $\sin\theta + \cos\theta$ est $\sqrt{2}$, on a aussi

$$(6) \qquad \sin\theta + \cos\theta \leqq \sqrt{2}.$$

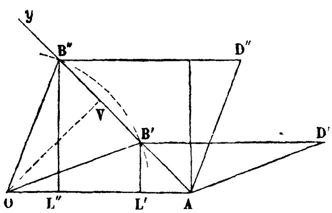
Les relations (5) et (6) donnent les limites entre lesquelles doit être compris l'angle θ pour que l'inscription du carré soit possible ; et ces relations ne seront compatibles que si l'on a

$$\frac{a}{b} \leqq \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad a \leqq b\sqrt{2}.$$

Ainsi, la construction du carré inscrit exige d'abord que les côtés donnés satisfassent aux relations

$$b \leqq a \leqq b\sqrt{2}.$$

Fig. 3.



En supposant ces premières conditions remplies, construisons les limites de θ. Pour cela, soit $OA = 2a$ (*fig.* 3), l'égalité

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \quad \text{donne} \quad \theta = 45^\circ = \text{AOV};$$

c'est une des limites de θ. Menons ensuite par le point A la ligne indéfinie Ay telle, que l'angle OA$y = 45^\circ$, et du point O comme centre, avec $2b$ pour rayon, décrivons un arc de cercle. Puisque l'on a

$$a < b\sqrt{2}, \quad \text{d'où} \quad b > \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad 2b > \text{OV},$$

cet arc coupera nécessairement la ligne Ay en deux points B', B'', et les angles

$$\text{AOB}' = \theta', \quad \text{AOB}'' = \theta'',$$

qui comprennent entre eux la première limite AOV, seront les valeurs de θ satisfaisant à l'équation

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{a}{b}.$$

En effet, en abaissant B'L' perpendiculaire sur OA, on a

$$\text{B}'\text{L}' = \text{L}'\text{A},$$

et, par suite,

$$2a = \text{OA} = \text{OL}' + \text{L}'\text{A} = \text{OL}' + \text{BL}' = 2b(\cos\theta' + \sin\theta'),$$

d'où

$$\cos\theta' + \sin\theta' = \frac{a}{b}.$$

On verra de même que

$$\cos\theta'' + \sin\theta'' = \frac{a}{b}.$$

Il résulte encore de la relation $b < a$, que les deux angles θ', θ'' seront aigus.

Ainsi, les deux côtés $2a$ et $2b$ étant donnés et satisfaisant aux conditions

$$b \leqq a \leqq b\sqrt{2},$$

on pourra donner à l'angle θ formé par ces côtés toutes les valeurs comprises entre les limites AOB′, AOB″, auxquelles correspondent les parallélogrammes B′OAD′, B″OAD″. En prenant pour le sommet B un point quelconque de l'arc B′B″, compris entre B′ et B″, on déterminera toujours un parallélogramme dans lequel il sera possible d'inscrire un carré.

Dans le cas où $a = b$, les limites de θ sont données par les relations

$$\sin\theta + \cos\theta \geqq 1 \quad \text{et} \quad \sin\theta + \cos\theta \leqq \sqrt{2};$$

et comme ces relations ont lieu pour toute valeur de θ comprise entre 0 et 90 degrés, on en conclut qu'il est toujours possible d'inscrire un carré dans un losange, quels que soient les angles de ce losange.

Si l'on a

$$a = b\sqrt{2},$$

les conditions (5) et (6) deviennent

$$\sin\theta + \cos\theta \geqq \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta + \cos\theta \leqq \sqrt{2},$$

ce qui exige que l'on ait

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}, \quad \text{d'où} \quad \theta = 45^\circ.$$

Il n'y a, dans ce cas, qu'un seul parallélogramme dans lequel on puisse inscrire un carré.

Ces dernières propriétés résultent aussi de la construction indiquée sur la *fig.* 3, quand on y suppose successivement

$$2b = \text{OA} \quad \text{et} \quad 2b = \text{OV}.$$