Note de M. Lebesgue

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 44-45

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__44_1>

NOTE DE M. LEBESGUE.

Trouver un triangle dont les côtés et la surface forment une équidifférence en nombres rationnels x, x + y, x + 2y, x + 3y.

La question admet-elle des solutions en nombres entiers?

L'équation du problème est

$$x + 3y = \sqrt{\frac{3(x+y)}{2}\,\frac{(x+3y)}{2}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$= \frac{x+y}{4}\sqrt{3(x+3y)(x-y)},$$

ou bien

$$4 = (x+y)\sqrt{\frac{3(x-y)}{x+3y}}.$$

Posant $y = xz$,

$$4 = x(1+z)\sqrt{\frac{3(1-z)}{1+3z}}.$$

Soit

$$\frac{3(1-z)}{1+3z}=\frac{p^2}{q^2}$$

(p, q étant premiers entre eux), il vient

$$x=\frac{6q}{p}\left(\frac{p^2+q^2}{p^2+3q^2}\right); \quad y=\frac{2q}{p}\left(\frac{3q^2-p^2}{p^2+3q^2}\right).$$

Comme

$$x+y=\frac{4q}{p}, \quad x-y=\frac{8pq}{(p^2+3q^2)},$$

on en déduit facilement que la seule solution en nombres entiers est donnée par $p=q=1$, d'où $x=3$, $y=1$.

Cette solution a été donnée t. XVII, p. 395.