Nouvelles annales de mathématiques

Blerzy

Invariants et solution des questions 387 et 412

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 420-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__420_1>

INVARIANTS [suite (*)] ET SOLUTION DES QUESTIONS 387 ET 412

(voir t. XVII, p. 301);

PAR M. BLERZY,
Directeur des lignes télégraphiques, à la Rochelle.

1. Les trois formules générales d'invariants que j'ai

(*) Je viens de retrouver ce précieux travail qui date de 1858, et que j'avais malheureusement égaré. TM.

données précédemment (tome XVII) sont homogènes en exposants et en indices. Il est facile de démontrer que cette propriété s'étend à tous les invariants simples.

Je suppose qu'un invariant I puisse se décomposer en deux parties, l'une I_{nn_1} d'exposant n et d'indice n_1, l'autre I_{n',n'_1} d'exposant n' et d'indice n'_1. En effectuant sur I l'opération indiquée par $\sum ia_{i-1}\frac{dI}{da_i}$, on obtient une fonction composée de deux espèces de termes : les uns provenant de I_{n,n_1} sont d'exposant n et d'indice $n_1 - 1$, les autres provenant de I_{n',n'_1} sont d'exposant n' et d'indice $n'_1 - 1$, et la somme de ces termes étant nulle indépendamment des valeurs particulières attribuées aux coefficients a_i, on doit avoir séparément

$$\sum ia_{i-1}\frac{dI_{n,n_1}}{da_i} = 0 \quad \text{et} \quad \sum ia_{i-1}\frac{dI_{n',n'_1}}{da_i} = 0,$$

c'est-à-dire que I est la somme de deux invariants simples.

En général les fonctions qui expriment les données d'une question étant prises toutes sous forme homogène tant en indices qu'en exposants, les fonctions algébriques effectuées sur ces fonctions ne donneront jamais que des résultats homogènes, ce qui est un utile moyen de contrôle de l'exactitude des calculs.

2. Il résulte des deux conditions d'homogénéité et de symétrie qu'une fonction impaire ne peut avoir d'invariant d'ordre impair en exposant et n'a pas d'invariant du second degré. C'est facile à démontrer.

On peut en conclure aussi, comme cas particulier d'un théorème *probablement* général, que

$$f_6 = ax^6 + 6a_1x^5 + 15a_2x^4 + 20a_3x^3 + 15a_4x^2 + 6a_5x + a_6.$$

n'a pas d'invariant du troisième degré; car cet invariant serait de la forme

$$I = m.a_0 a_3 a_6 + n.a_1 a_3 a_5 + p.a_2 a_3 a_4 + q(a_0 a_4 a_5 + a_1 a_2 a_6) + r(a_1 a_4^2 + a_2^2 a_5) + s a_3^3,$$

et en cherchant à déterminer les coefficients m, n, p, q, r, s par la condition

$$\sum_1^6 i a_{i-1} \frac{dI}{da_i} = 0,$$

on trouve que tous ces coefficients doivent être nuls.

3. Les propriétés des invariants dont j'ai parlé jusqu'ici semblent purement théoriques; quelques exemples montreront l'importance que ces fonctions sont appelées à prendre dans l'étude algébrique des équations.

Je commencerai par établir deux formules très-utiles et qui résultent de la notation symbolique

$$\begin{aligned} f_n &= (a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, 1)^n \\ &= a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \ldots + n a_{n-1} x + a_n. \end{aligned}$$

La formule de Taylor appliquée aux fonctions entières et rationnelles donne

$$f_m(x+y) = \frac{\frac{d^m f_m}{dy^m}}{1.2.3\ldots m} x^m + \frac{\frac{d^{m-1} f_m}{dy^{m-1}}}{1.2\ldots m-1} x^{m-1} \ldots + \frac{\frac{d^2 f_m}{dy^2}}{1.2} x^2 + \frac{\frac{df_m}{dy}}{1} x + f_m;$$

or

$$f_m = a_0 y^m + m a_1 y^{m-1} + \ldots,$$

$$\frac{df_m}{dy} = m \left[\begin{array}{c} a_0 y^{m-1} + (m-1) a_1 y^{m-2} \\ + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} a_2 y^{m-3} + \ldots + a_{m-1} \end{array} \right] = m f_{m-1},$$

dont

$$\frac{\frac{df_m}{dy}}{1} = mf_{m-1}.$$

De même

$$\frac{d^2 f_m}{dy^2} = m\frac{df_{m-1}}{dy} = m(m-1)f_{m-2},$$

et par suite

$$\frac{\frac{d^2 f_m}{dy^2}}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2} f_{m-2},$$

et en général

$$\frac{\frac{d^i f_m}{dy^i}}{1.2\ldots i} = \frac{m(m-1)-(m-i+1)}{1.2\ldots i} f_{m-i};$$

d'où

$$f_m(x+y) = f_0.x^m + mf_1.x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} f_2.x^{m-2} + \ldots$$
$$+ mf_{m-1}.x + f_m.$$

4. Cherchons, au moyen de cette formule, à faire disparaître le deuxième terme d'une équation. Il faut poser

$$f_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_0 y + a_1 = 0$$

ou

$$y = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Il vient

$$f_m\left(x - \frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 x^m + \frac{m(m-1)}{1.2} f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) x^{m-2} + \ldots$$
$$+ mf_{m-1}\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) x + f_m\left(-\frac{a_1}{a_0}\right),$$

et en remplaçant $x - \frac{a_1}{a_0}$ par x, c'est-à-dire x par $\frac{a_0 x + a_1}{a_0}$, et multipliant par a_0^{m-1}, on obtient enfin l'identité

$$a_0^{m-1} . f_m(x) = (a_0 x + a_1)^m$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a_0 f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)(a_0 x + a_1)^{m-2} + \dots$$
$$+ a_0^{m-1} . f_m\left(-\frac{a_1}{a_0}\right),$$

dans laquelle

$$a_0^{i-1} . f_i\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0^{i-1} a_i - i a_0^{i-2} a_1 a_{i-1}$$
$$+ \frac{i(i-1)}{1.2} a_0^{i-3} a_1^2 a_{i-2} + \dots \mp \frac{i(i-1)}{1.2} a_0 a_2^{i-2} a_2 \pm (i-1) a_1^i.$$

Les signes supérieurs s'appliquent au cas de i impair et les signes inférieurs au cas de i pair.

Cette formule me servira plus loin pour transporter aux équations générales

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots = 0$$

les propriétés reconnues sous la forme

$$x^m + px^{m-2} + \dots = 0.$$

Comme

$$a_0 f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 a_2 - a_1^2,$$

on voit tout de suite, par application de la règle de Descartes, que

$$a_0 a_2 - a_1^2 < 0$$

est une condition de réalité des racines pour les équations de tous les degrés.

5. Dans ce qui suivra, je désignerai, pour simplifier

l'écriture, par

$$\varpi,\quad \varphi,\quad \lambda,\quad \mu,\quad \chi$$

les invariants

$$I_2,\quad I_{3,4},\quad I_{4,2},\quad I_{4,3},\quad I_{6,2}\ (*).$$

On vérifie facilement les relations que voici :

$$a_0\mu = \varpi\lambda - \varphi,$$

$$a_0 f_2\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0 a_2 - a_1^2 = \varpi,$$

$$\left[a_0^2 f_3\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)\right]^2 = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)^2 = a_0^2\varphi - 4\varpi^3$$
$$= a_0^2\varpi\lambda - a_0^3\mu - 4\varpi^3,$$

$$a^3 f_4\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0^3 a_4 - 4a_0^2 a_1 a_3 + 6a_0 a_1^2 a_2 - 3a_1^4$$
$$= a_0^2\lambda - 3\varpi^2,$$

$$a_0^5 f_6\left(-\frac{a_1}{a_0}\right) = a_0^5 a_6 - 6a_0^4 a_1 a_5 + 15a_0^3 a_1^2 a_4 - 20a_0^2 a_1^3 a_3$$
$$+ 15a_0 a_1^4 a_2 - 5a_1^6$$
$$= a_0^4\chi - 5a_0^2\varpi\lambda - 10a_0^3\mu + 5\varpi^3.$$

En désignant par D_m le discriminant de f_m, on sait en outre que

$$D_4 = \lambda^2 - 27\mu^2.$$

6. La formule du n° 4 appliquée à l'équation du troisième degré donne

$$a_0^2(a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3)$$
$$= (a_0x + a_1)^2 + 3(a_0a_2 - a_1^2)(a_0x + a_1)$$
$$+ (a_0^2a_3 - 3a_1a_2a_3 + 2a_1^3)$$
$$= (a_0x + a_1)^3 + 3\varpi(a_0x + a_1) \pm \sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3}.$$

L'ambiguïté du signe du radical introduit est sans importance, ce radical devant toujours par la suite être élevé au carré.

(*) *Voir* t. XVII, p. 301. TM.

On calcule facilement par la méthode de Lagrange l'équation aux carrés des différences de

$$x^3 + px + q = 0,$$

on trouve

$$V^3 + 6p V^2 + 9p^2 V + (4p^3 + 27 q^2) = 0.$$

L'équation aux carrés des différences de

$$(a_0 x + a_1)^3 + 3\varpi (a_0 x + a_1) \pm \sqrt{a_0^2 \varphi - 4\varpi^3} = 0$$

est donc

$$V^3 + 18\varpi V^2 + 81\varpi V + 27 a_0^2 \varphi = 0.$$

Soient $a_0 x_1 + a_1$ et $a_0 x_2 + a_1$ deux racines de la proposée, le carré de leur différence est $a_0^2 (x_1 - x_2)^2$; en remplaçant V par a_0^2 V, on a une nouvelle équation

$$a_0^4 V^3 + 18 a_0^2 \varpi V^2 + 81\varpi V + 27\varphi = 0,$$

qui a pour racine $(x_1 - x_2)^2$ et qui est par conséquent l'équation aux carrés des différences de

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0.$$

7. Le même procédé de calcul donne une vérification facile des formules de la question 412, t. XVI, p. 404, des *Nouvelles Annales*.

Je prends une équation sous la forme

$$x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + tx^{m-5} + ux^{m-6} + \ldots = 0.$$

Je désigne par s_i la fonction symétrique simple d'ordre i de cette équation et par S_i la même fonction symétrique pour l'équation aux carrés de la différence de la proposée

$$n = \frac{m(m-1)}{2}, \quad x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} + \ldots = 0.$$

Lagrange a donné entre ces fonctions symétriques la relation

$$S_i = ms_{2i} - 2i.s_1 s_{2i-1} + \frac{2i(2i-1)}{1.2} s_2 s_{2i-2} \mp \ldots$$
$$\pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2i(2i-1)\ldots(i+1)}{1.2\ldots i} s_i^2.$$

Les formules de Newton (*) donnent

$$s_1 = 0,$$
$$s_2 = -2p,$$
$$s_3 = -3q,$$
$$s_4 = 2(p^2 - 2r),$$
$$s_5 = 5(pq - t),$$
$$s_6 = -2p(p^2 - 3r) + 3q^2 - 6u;$$
$$S_1 + B = 0,$$
$$S_2 + BS_1 + 2C = 0,$$
$$S_3 + BS_2 + CS_1 + 3D = 0,$$

et la formule de Lagrange donne

$$S_1 = ms_2 = -2mp,$$
$$S_2 = ms_4 + 3s_2^2 = 2m(p^2 - 2r) + 12p^2,$$
$$S_3 = ms_6 + 15 s_2 s_4 - 10 s_3^2$$
$$= -2mp(p^2 - 3r) + 3mq^2 - 6mu - 60p(p^2 - 2r) - 90q^2.$$

On en déduit

$$B = 2mp,$$
$$C = p^2(2m^2 - m - 6) + 2mr,$$
$$3D = 2p^3(m-2)(2m^2 + m - 15)$$
$$+ 6pr(2m^2 - m - 20) - 3q^2(m - 30) + 6mu.$$

(*) La justice exige formules d'Albert Girard. Tm.

Maintenant j'identifie la proposée avec

$$(a_0 x + a_1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\varpi(a_0 x + a_1)^{m-2}$$

$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\sqrt{a^2\varpi\lambda - a_0^3\mu - 4\varpi^3}\,(a_0 x + a_1)^{m-3}$$

$$+ \frac{m(m-1)m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(a_0^2\lambda - 3\varpi^2)(a_0 x + a_1)^{m-4} + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\times (a_0^4\chi - 5a_0^2\varpi\lambda - 10a_0^3\mu + 5\varpi^3)(a_0 x + a_1)^{m-6} + \ldots.$$

Je n'écris pas le terme en $(a_0 x + a_1)^{m-5}$; il est inutile.

La substitution de ces coefficients à p, q, etc., donne après réduction

$$B = -a_0^2 \sum (x_1 - x_2)^2 = m^2(m-1)\varpi,$$

$$2C = 2a_0^4 \sum (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2$$

$$= m^2(m-1)(m-2)\left[m^2\varpi^2 + \frac{m-3}{6}a_0^2\lambda\right],$$

$$6D = -6a_0^6 \sum (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2$$

$$= m^2(m-1)(m-2)$$

$$\times \left[\begin{array}{c} m^4(m-3)\varpi^3 + \frac{m^2}{2}(m^2 - 5m + 8)a_0^2\varpi\lambda \\ -\frac{m(7m-15)}{2}a_0^3\mu + (m-3)(m-4)(m-5).a_0^4\chi \end{array}\right],$$

x_1, x_2, x_3, etc., étant les racines de

$$f_m = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)(x, 1)^m = 0.$$

8. Je vais maintenant faire usage des invariants dans la résolution algébrique des équations du troisième et du quatrième degré.

On trouve dans la quinzième leçon du *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret (1re édition, p. 186) deux méthodes pour résoudre l'équation du troisième degré. La première, celle de Hudde, traite l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

et fait dépendre sa résolution des deux suivantes

$$x = y - \frac{p}{3y},$$

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Cette dernière équation étant la résolvante de la proposée, l'expression algébrique de x est

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}},$$

où

$$R = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

et en n'associant que les valeurs des radicaux cubiques dont le produit est $-\frac{p}{3}$.

J'identifie la proposée avec

$$(a_0 x + a_1)^3 + 3\varpi(a_0 x + a_1) \pm \sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3} = 0,$$

la résolvante devient

$$y^6 \pm \sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3}\, y^3 - \varpi^3 = 0, \quad R = \frac{a_0^2\varphi}{4},$$

et l'expression algébrique de x devient

$$a_0 x + a_1$$

$$= \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3} + a_0\sqrt{\varphi}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\sqrt{a_0^2\varphi - 4\varpi^3} - a_0\sqrt{\varphi}}{2}}.$$

La deuxième méthode proposée par Lagrange traite l'équation

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

et la remplace par le système

$$x = \frac{-P + \sqrt[3]{\theta_1} + \sqrt[3]{\theta_2}}{3},$$

$$\theta^2 - (2P_3 + 9PQ - 27R)\,\theta + (P^2 - 3Q)^3 = 0,$$

θ_1 et θ_2 étant les racines de cette résultante en θ.

J'identifie avec

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3 = 0,$$

la résolvante devient

$$\frac{a_0^6 \theta^2}{27^2} \pm \sqrt{a_0^2 \varphi - 4\varpi^3}\,\frac{a_0^3 \theta}{27} + \varpi^3 = 0,$$

d'où

$$\frac{a_0^3 \theta}{27} = \frac{-\sqrt{a_0 \varphi - 4\varpi^3} \pm a_0 \sqrt{\varphi}}{2},$$

et

$$x = \frac{-a_1 + \sqrt[3]{\dfrac{-\sqrt{a_0\varphi - 4\varpi^3} + a_0\sqrt{\varphi}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{-\sqrt{a_0\varphi - 4\varpi^3} - a_0\sqrt{\varphi}}{2}}}{a_0},$$

valeur identique avec la première trouvée par la formule de Cardan.

L'extension de la formule de Cardan aux équations complètes ne présente qu'un intérêt théorique; l'introduction des imaginaires dans deux au moins des trois valeurs de x rend la formule inapplicable en pratique. Mon seul but était de montrer par un calcul simple que les méthodes de Hudde et de Lagrange sont identiques non-seulement dans leurs résultats, mais même dans les résolvantes qu'elles fournissent.

9. Des calculs analogues s'appliquent à la résolution des équations du quatrième degré. Je ne parlerai que de la méthode de Lagrange qui, partant de l'équation

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

arrive à la résolvante

$$\theta^3 - (3p^2 - 8q)\theta^2 + (3p^4 - 16p^2q + 16q^2 + 16pr - 64s)\theta - (p^3 - 4pq + 8r)^2 = 0$$

et donne pour expression des racines de la proposée

$$x = \frac{-p + \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}}{4}.$$

Avec la notation symbolique

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x, 1)^4 = 0,$$

et en posant

$$\tau = \frac{a_0^2}{16}\theta,$$

la résolvante devient

$$4\tau^3 + 12\varpi\tau^2 + (12\varpi^2 - a_0^2\lambda)\tau + (4\varpi^3 - a_0^2\varphi) = 0,$$

et l'expression générale de x

$$x = \frac{-a_1 + \sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_2} + \sqrt{\tau_3}}{a_0}.$$

La résolvante peut s'écrire plus simplement

$$4(\tau + \varpi)^3 - a_0^2\lambda(\tau + \varpi) + a_0^3\mu = 0,$$

et l'on en déduit

$$\tau = -\varpi + \frac{a_0}{2}\left[\sqrt[3]{-\mu + \frac{\sqrt{-D_4}}{27}} + \sqrt[3]{-\mu + \frac{\sqrt{-D_4}}{27}}\right],$$

expression remarquablement simple, grâce à l'emploi des invariants.

10. Si $\mu = o$, la résolvante devient

$$4(\tau + \varpi)^3 - a^2\lambda(\tau + \varpi) = o,$$

et se décompose en les deux suivantes

$$4(\tau + \varpi)^2 - a^2\lambda = o, \quad \tau + \varpi = o.$$

Dans ce cas τ et par suite x ne contient pas de radical cubique, résultat énoncé dans la question 387 des *Nouvelles Annales* (t. XVI, p. 183).

11. Les applications qui précèdent montrent combien la notation symbolique et la considération des invariants simplifient l'étude algébrique des fonctions. La notation habituelle $x^m + px^{m-2} + \ldots$ ne devrait être employée que comme procédé de calcul et devrait toujours disparaître des résultats. L'homogénéité des formules est un contrôle continuel de l'exactitude des opérations et un moyen mnémonique d'en conserver le souvenir. On peut appliquer à toutes les parties des mathématiques ce que M. Lamé dit de la géométrie : « Si par un choix néces-
» sairement arbitraire, on remplace l'ensemble de plu-
» sieurs lignes par une seule, on perd toujours en clarté,
» en précision, en richesse de déduction plus qu'on ne
» peut gagner à cette simplification apparente. » (*Leçons sur les surfaces isothermes*, p. 16.)