E. DE JONQUIÈRES

Discussion d'un problème relatif à la construction des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 404-406

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__404_0>

DISCUSSION D'UN PROBLÈME RELATIF A LA CONSTRUCTION DES CONIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans le tome XVI des *Nouvelles Annales*, pages 116 et suivantes, j'ai fait quelques applications des théories de la *Géométrie supérieure* à la construction des coniques déterminées par cinq conditions (points ou tangentes). Quoique les solutions que j'ai développées soient très-simples, il en est deux qui paraissent ne pas avoir été parfaitement comprises par tous les lecteurs; je veux parler de celles où il s'agit de construire une conique qui passe par trois points et qui touche deux droites données, et de sa corrélative par voie de dualité, où les données sont trois tangentes et deux points.

Je vais faire voir que les difficultés qu'on a cru remarquer n'existent pas, et que les solutions que j'ai données pour ces deux cas sont aussi complètes que les autres.

Dans le premier cas, où les données sont trois points a, b, c et deux tangentes, la solution que j'ai indiquée consiste à déterminer à la fois deux autres points de la conique, savoir, les points de contact des tangentes données, en construisant la corde de contact qui les joint. A cet effet, sur le côté ab du triangle inscrit donné abc, on trouve un point 1 appartenant à cette corde de contact, et pareillement un point 3 sur le côté bc. Or le point 1 ne s'obtient pas isolément sur ab; car c'est un des deux *points-doubles* d'une involution dont le segment ab fait partie, et l'autre point-double 2 de cette involution satisfait également à la question. Par la même raison, le point

3 s'obtient, sur *bc*, en même temps qu'un autre point 4, qui jouit des mêmes propriétés que lui. Donc, au lieu d'une corde de contact, on en trouve quatre qui sont : 13, 14, 23, 24, et qui fournissent quatre solutions distinctes du problème proposé.

Actuellement, si l'on considère le côté *ca*, on y trouve de même deux points 5 et 6, par chacun desquels doit passer une des cordes de contact cherchées. Donc si les points 1, 2; 3, 4; 5, 6, conjugués deux à deux, ne présentaient aucune particularité dans leurs situations relatives, la question admettrait douze solutions, puisque, indépendamment des quatre cordes de contact déjà trouvées, on aurait encore les huit suivantes, savoir : 15, 16, 25, 26, 35, 36, 45, 46.

Mais il est aisé de voir que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont situés, trois à trois, sur quatre droites, c'est-à-dire qu'ils sont les quatre sommets et les deux points de concours des côtés opposés d'un même quadrilatère, et qu'ainsi ils ne donnent lieu qu'à quatre droites distinctes.

En effet, les points 1, 2 divisent harmoniquement le segment *ab*, puisqu'ils sont les points-doubles d'une involution dont ce segment fait partie.

Pareillement, les points 3, 4 divisent harmoniquement *bc*, et les points 5, 6 divisent harmoniquement *ca*. Donc le théorème 375 de la *Géométrie supérieure* trouve ici son application; ce qui démontre l'assertion émise ci-dessus.

Une difficulté analogue se présente dans la question corrélative, où les données sont trois tangentes et deux points *ab*; et au premier abord il semble, comme dans le problème précédent, qu'il y ait douze solutions; mais les six droites auxiliaires (corrélatives des six points 1, 2, 3, 4, 5, 6), qui conduisent ici à la solution, sont les quatre côtés et les deux diagonales d'un même quadrilatère; elles se coupent donc, trois à trois, en quatre points, et ces points sont les *pôles* cherchés de la corde inscrite *ab*, relatifs aux quatre coniques qui seules satisfont à la question proposée. Je laisse au lecteur le soin facile de trouver comment cette conclusion résulte du théorème 373 de la *Géométrie supérieure*, page 277.

Ainsi, chacun de ces deux problèmes n'admet pas d'autre solution que les quatre que j'ai mentionnées dans l'article précité des *Nouvelles Annales*.