Nouvelles annales de mathématiques

Note sur les foyers des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 399-403
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__399_1>

NOTE SUR LES FOYERS DES COURBES PLANES.

1. Soient

$$\operatorname{tang}\varphi = a + bi,$$
$$\operatorname{tang}\psi = a - bi;$$

on a

$$\operatorname{tang}(\varphi+\psi) = \frac{2a}{1-a^2-b^2} = \textit{réelle}.$$

Lorsque $a=0$, $\operatorname{tang}(\varphi+\psi)=0$.

$$\operatorname{tang}(\varphi-\psi) = \frac{2bi}{1+a^2+b^2};$$

si

$$a^2 + b^2 = 1,$$

alors

$$\tang(\varphi - \psi) = bi.$$

2.

$$\tang\varphi = i = -\frac{1}{i},$$

$$1 + \tang^2\varphi = 0 = \frac{1}{\cos^2\varphi};$$

d'où

$$\cos\varphi = \infty$$

et, de même,

$$\sin\varphi = \infty.$$

3.

$$y = xi,$$

$$y = -\frac{x}{i},$$

deux droites imaginaires identiques et satisfaisant pourtant à la condition de la perpendicularité $aa' + 1 = 0$,

$$\tang(\varphi + \psi) = \frac{i + \tang\psi}{1 - i\tang\psi} = \frac{(i + \tang\psi)(i + i\tang\psi)}{1 + \tang^2\psi}$$
$$= (\sin\psi + i\cos\psi)(\cos\psi + i\sin\psi) = i = \tang\varphi;$$

donc la droite imaginaire qui a pour équation $y = xi$, fait avec une droite quelconque un angle dont la tangente est constamment égale à i; résultat purement analytique : on suppose les axes rectangulaires.

4. Étant donnée une courbe plane C_n, si parmi les $n(n-1)$ tangentes qu'on peut mener d'un point x', y' situé dans le plan de la courbe, il s'en trouve *au moins* deux faisant avec l'axe des x, et par conséquent avec une droite quelconque, des angles dont les tangentes sont $\pm i$; ce point est un *foyer* de la courbe C_n.

C'est la définition qu'on doit à M. Plücker (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 433; t. XII, p. 225).

5. L'équation d'une courbe est satisfaite par une infinité de valeurs imaginaires des coordonnées; c'est *dans ce sens* qu'on dit qu'une courbe passe par une infinité de *points imaginaires*, et de même une courbe a une infinité de *tangentes imaginaires*, et sur chaque tangente imaginaire on peut trouver un point réel, mais un seul, car deux donneraient une tangente réelle. A toute tangente imaginaire correspond un point imaginaire sur la polaire réciproque, et, *vice versâ*, à tout point imaginaire de la polaire réciproque correspond une tangente imaginaire de la courbe donnée. La recherche d'un foyer se ramène donc à trouver sur la polaire réciproque un point imaginaire dont la polaire, par rapport à la conique directrice, soit de la forme $x + iy = q$, et si nous parvenons à déterminer un *point réel* sur cette tangente imaginaire, ce point réel est un foyer; conformément à la définition Plücker, on suppose les axes rectangulaires, afin que i soit la tangente de la droite avec l'axe des x.

6. Soit donc

$$U = 0$$

l'équation d'une courbe de degré n et de classe p, axes rectangulaires, et coordonnées trilitères x, y, z.

Prenons pour conique directrice le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

et soit

$$u = 0$$

la polaire réciproque de U; elle sera de degré p et de classe n.

Prenons sur cette ligne le point x', y', z'; la polaire de ce point, relativement au cercle, a pour équation

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Faisons

$$x' = 1, \quad y' = i;$$

l'équation

$$u = 0$$

devient une équation en z de degré p. Soit $x_1 + y i_1$ une racine de cette équation où x_1 et y_1 sont des quantités réelles; la polaire réciproque passe donc par le point imaginaire $x', y', x_1 + iy_1$, et la polaire de ce point est

$$xx' + yy' + z(x_1 + iy_1) = 0,$$

droite imaginaire tangente à la courbe $U = 0$, et dont le coefficient angulaire est i.

L'équation de cette polaire, ayant égard aux valeurs x', y', est satisfaite en prenant

$$x = -x_1, \quad y = -y_1, \quad z = 1;$$

cette droite imaginaire passe donc par le point réel x_1, y_1, 1; ce point est donc un foyer. Pour avoir les valeurs x_1, y_1, on remplace x, y, z par 1, i, $x_1 + iy_1$ dans $u = 0$, et l'équation se partage en deux autres équations en x_1, y_1, à coefficients réels, chacune de degré p : il y a donc au plus p^2 foyers.

7. Les équations des tangentes imaginaires qui passent par les deux foyers sont donc

$$x - x_1 + i(y - y_1) = 0,$$
$$x - x_1 - i(y - y_1) = 0.$$

Décrivons un cercle quelconque ayant pour équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + F = 1;$$

les deux asymptotes imaginaires de ce cercle ont pour équations

$$x - x_1 \pm i(y - y_1) = 0;$$

ce cercle passe donc par deux points imaginaires situés à l'infini; désignons-les par I', I''. Les tangentes menées de ces points à la courbe U, sont précisément *des tangentes focales*; p de ces tangentes partent de I' et p autres de I'' et pas davantage, puisque la courbe U est de la classe p. Les intersections de ces deux faisceaux donnent les p^2 foyers : ainsi chaque rayon du faisceau I' coupe le faisceau I'' en p points, mais dont un seul est réel; c'est celui qui est donné par l'intersection de deux rayons $x - x_1 \pm i(y - y_1) = 0$. Il n'y a donc que p foyers réels et $p^2 - p$ (nombre pair) foyers imaginaires. Le nombre de foyers réels est donc égal au nombre qui désigne la classe de la courbe.

8. *Exemple.* Soit

$$\begin{aligned} U = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy &= 0, \\ D = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - bb'b'' &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 0, \end{aligned}$$

on aura

$$u = D_a x^2 + D_{a'} y^2 + D_{a''} z^2 + 2D_b yz + 2D_{b'} zx + D_{b''} xy = 0.$$

où D_a est la dérivée de D par rapport à a, etc.

Faisons

$$x = 1, \quad y = i, \quad z = x_1 + iy_1,$$

et séparant les équations, on obtient

$$\begin{aligned} D_{a''}(x_1^2 - y_1^2) + 2D_{b'}x_1 - 2D_b y_1 + D_a - D_{a'} &= 0, \\ D_{a''}x_1y_1 + D_b x_1 + D_{b'} y_1 + D_{b''} &= 0, \end{aligned}$$

deux hyperboles équilatères dont les intersections donnent les foyers; deux intersections réelles et deux imaginaires. La discussion ne présente nulle difficulté.