Méthode d'élimination ; d'après M. Cayley

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 397-399
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__397_2>

MÉTHODE D'ÉLIMINATION;

D'APRÈS M. CAYLEY.

1. *Lemme*. Soient m et n deux nombres entiers positifs, et $n > m$.

On a

$$x^m y^n - x^n y^m = x^m y^m (y - x)$$
$$\times (y^{n-m-1} + y^{n-m-2} x + y^{n-m-3} x^2 + \ldots).$$

Soient, 1°

$$\varphi x = ax + b = 0,$$
$$\psi(x) = \alpha x + \beta = 0,$$

on a

$$\frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{y - x} = a\beta - \alpha b = \begin{vmatrix} a, & \alpha \\ b, & \beta \end{vmatrix},$$

égalant ce déterminant à zéro, on a la résultante des deux équations.

2°.

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$
$$\psi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

on obtient

$$\frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{y - x}$$
$$= (b\alpha - \beta a)xy + (c\alpha - \gamma a)(x + y) + c\beta - \gamma b.$$

Représentons par $d_{ik} x^i y^k$ un terme quelconque de cette expression; il faut donner à i et à k les valeurs 0 et 1.

Posant

$$d_{00} = c\beta - \gamma b,$$
$$d_{11} = c\alpha - \gamma a,$$
$$d_{10} = c\alpha - \gamma a,$$
$$d_{11} = b\alpha - \beta a;$$

on aura

$$\begin{vmatrix} d_{10} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

telle est la résultante.

3°.

$$\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots = 0,$$
$$\psi(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \ldots = 0.$$

Le quotient $\dfrac{\varphi(x)\psi(y)-\varphi(y)(\psi x)}{y-x}$. d'après le lemme I, est une fonction entière en x et y, où chaque terme est de la forme $d_{ik}\,x^i y^k$; par exemple, on a

$$(b\gamma-\beta\alpha)\,(x^{n-1}y^{n-2}x^{n-2}y^{n-1}),\quad i=n-1,\ k=n-2,\ \ldots;$$

d_{ik} est une fonction des coefficients des deux équations, et on a pour résultante le déterminant

$$\begin{vmatrix} 00 & 01 & 02 & \ldots\ldots & 0.n-1 \\ 10 & 11 & 12 & \ldots\ldots & 1.n-1 \\ 20 & 21 & 21 & \ldots\ldots & 2.n-1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1.0. & n-1 & 1 & \ldots & n-1.n-1 \end{vmatrix} = 0;$$

le déterminant d est sous-entendu.

Observation. Cette méthode revient à la méthode dite *abrégée* de Bezout. (*Voir* Faa de Bruno, *Théor. générale de l'élimination*, p. 53.)