Note sur une démonstration d'un théorème de mécanique énoncé par Euler

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 390-392
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__390_1>

NOTE

Sur une démonstration d'un théorème de mécanique énoncé par Euler.

Dans le mouvement d'un corps rigide, il est toujours possible d'assigner une droite passant par un point arbitraire du corps, mobile avec lui et telle, qu'au bout d'un temps fini quelconque, elle se trouve parallèle à sa direction initiale.

Le théorème d'EULER revient évidemment, comme le fait observer M. Brioschi (*), à cette proposition de géométrie élémentaire :

Étant donnés deux systèmes d'axes rectangulaires ayant la même origine, on peut déterminer une droite passant par cette origine, et telle, qu'une rotation autour de cette droite amène l'un des systèmes à coïncider avec l'autre; proposition qui ne diffère pas de celle-ci :

Étant donnés deux systèmes d'axes rectangulaires

(*) Théorie des *déterminants*, p. 78.

(OX, OY, OZ), (OX′, OY′, OZ′), *de même origine, on peut déterminer une droite* (OH) *passant par l'origine, et qui fasse avec les axes* OX′, OY′, OZ′ *des angles* HOX′, HOY′, HOZ′ *respectivement égaux aux angles* HOX, HOY, HOZ.

Il est facile d'établir l'existence de la droite en question dans ce dernier énoncé. Car, si l'on mène les bissectrices OA, OB des angles X′OX, Y′OY, et qu'ensuite on élève par OA et OB des plans perpendiculaires à X′OX, Y′OY, l'intersection OH de ces deux plans sera précisément la droite cherchée.

En effet, il est clair qu'on aura d'abord HOX′ = HOX et HOY′ = HOY; d'ailleurs, X′OY′ = XOY comme droits : donc les deux angles *trièdres* OHX′Y′, OHXY ont leurs trois faces égales chacune à chacune, et, par conséquent, ces deux *trièdres* sont égaux dans toutes leurs parties. Il en résulte que les inclinaisons de la droite OH sur les plans OX′Y′, OXY sont égales entre elles; d'où il faut conclure que cette droite fait aussi des angles égaux avec les deux axes OZ′, OZ perpendiculaires aux plans OX′Y′, OXY. La proposition est ainsi démontrée.

L'égalité HOZ = HOZ′ montre que la droite OH est située dans un plan perpendiculaire à ZOZ′ et passant par la bissectrice OC de l'angle ZOZ′. Donc les trois plans respectivement perpendiculaires à X′OX, Y′OY, Z′OZ, et menés par les bissectrices OA, OB, OC des angles X′OX, Y′OY, Z′OZ se coupent suivant une même droite.

On peut, sans difficulté, reconnaître que les trois angles dièdres X′OHX, Y′OHY, Z′OHZ sont égaux entre deux, et que la valeur de ces dièdres représente l'angle de la rotation qui amène l'un des deux systèmes d'axes à coïncider avec l'autre.

M. Brioschi a donné, de la proposition que nous venons d'exposer, une démonstration analytique qui offre une application remarquable de la théorie des déterminants.

Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la droite cherchée (OH), rapportée aux axes OX, OY, OZ; et par (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) les cosinus des angles que les droites OX', OY', OZ' forment avec les axes de coordonnées OX, OY, OZ; les égalités HOX' = HOX, HOY' = HOY, HOZ' = HOZ donnent lieu aux équations

$$(1) \qquad (a_1 - 1)x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

$$(2) \qquad a_2 x + (b_2 - 1)y + c_2 z = 0,$$

$$(3) \qquad a_3 x + b_3 y + (c_3 - 1)z = 0,$$

qui représentent trois plans dans lesquels la droite que l'on cherche doit se trouver. Tout se réduit donc à faire voir que ces trois plans se coupent suivant une même droite, c'est-à-dire qu'on a

$$\begin{vmatrix} (a_1 - 1), & b_1, & c_1 \\ a_2, & (b_2 - 1), & c_2 \\ a_3, & b_3, & (c_3 - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

Or, c'est là une égalité que *M. Brioschi* a très-simplement déduite d'une proposition plus générale de la théorie des déterminants.

Il est à remarquer que les plans représentés par les équations (1), (2), (3) sont perpendiculaires aux plans X'OX, Y'OY, Z'OZ, et passent par les bissectrices des angles X'OX, Y'OY, Z'OZ; de sorte que cette solution analytique conduit au procédé graphique que nous avons indiqué pour déterminer la droite cherchée. G.