Faure

Transformation des propriétés métriques des figures

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 381-388

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__381_1>

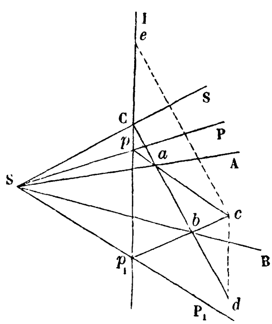
TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir t. XVII, p 184);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Transformation des relations de segments.

Transformer homographiquement la longueur d'un segment a′ b′ *d'une droite* C′.



8 *bis*. Soient sur une droite C deux points a, b correspondants aux points a' et b' de la droite C′. Prenons sur la droite I les deux points p et p_1 qui correspondent à ceux de la première figure situés à l'infini sur les droites imaginaires $y' = \pm\sqrt{-1}\,x'$. Si l'on mène les

droites pa, $p_1 b$, on formera un triangle abc qui sera l'homologue du triangle $a'b'c'$ de la première figure, construit d'après le lemme.

• On aura donc, d'après la relation d'aire (1) (t. XVII, p. 382),

$$a'b'c' = m\,\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma},$$

α, β, γ étant les distances des sommets a, b, c à la droite I. Mais, d'après le lemme cité,

$$a'b'c' = \frac{\overline{a'b'}^2}{4\sqrt{-1}}:$$

donc

$$\overline{a'b'}^2 = 4m\sqrt{-1}\,\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma}.$$

La longueur $a'b'$ se trouve ainsi transformée, et nous n'introduisons dans la seconde figure que deux nouveaux points p et p_1. S'il se trouve un cercle dans la première figure, il lui correspond dans la seconde une conique, dont les points d'intersection avec la droite I sont nos points p et p_1.

9. L'expression précédente peut se mettre sous une forme plus commode pour les applications. Menons la droite ce parallèle à C et cd parallèle à I. Les droites C et I se coupent au point C. On a

$$\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma} = \frac{ab.cd}{2\,\mathrm{C}a\;\mathrm{C}b.ce\sin(\mathrm{C},\mathrm{I})}:$$

or

$$\frac{cd}{ce} = \frac{\mathrm{C}p.ac}{\mathrm{C}a.cp} = \frac{\mathrm{C}p_1.bc}{\mathrm{C}b.cp_1},$$

par suite

$$\frac{\overline{cd}^2}{\overline{ce}^2} = \frac{\mathrm{C}p.\mathrm{C}p_1}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}b}\cdot\frac{ac\;bc}{cp.cp_1} = \frac{\mathrm{C}p\;\mathrm{C}p_1}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}b}\cdot\frac{ab.cd}{pp_1.ce}:$$

donc

$$\frac{cd}{ce} = \frac{Ca.Cp_1.ab}{Ca.Cb.pp_1},$$

et

$$\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma} = \frac{\overline{ab}^2}{\overline{Ca}^2.\overline{Cb}^2} \frac{Cp\ Cp_1}{pp_1} \frac{1}{2\overline{\sin}^2(C, I)}.$$

Si l'on pose

$$R^2 = \frac{2m\sqrt{-1}\ Cp.Cp}{pp_1},$$

on aura

$$(1) \qquad a'b' = R\frac{ab\ \sin(C, I)}{\alpha.\beta}.$$

Première transformation.

Appelons π et π_1 les distances des points p et p_1 au segment ab; on aura aussi

$$(2) \qquad a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}}{pp_1}\frac{ab\sqrt{\pi.\pi_1}}{\alpha\ \beta}},$$

et, sous cette forme, nous dirons que *la longueur d'un segment d'une figure est égale à la longueur du segment correspondant divisée par le produit des distances de ses extrémités à une droite fixe* I, *multipliée par la racine carrée du produit des distances de deux points fixes de cette droite au segment et par une constante.*

La formule (1) peut s'écrire

$$(3) \qquad a'b' = R\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right).$$

de sorte que si la distance β est infinie, on a

$$(3)' \qquad a'b' = \frac{R}{\alpha};$$

dans ce cas le point b' est situé sur la droite I'.

On a aussi

$$(4) \qquad a'b' = \mathrm{R} \cdot \frac{ab}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}b}\,\frac{1}{\sin(\mathrm{C},\mathrm{I})}.$$

Si l'on joint un point quelconque S aux points a', b', C par les droites A, B, S, on a

$$(5) \qquad a'b' = \mathrm{R}\,\frac{\sin(\mathrm{A},\mathrm{B})}{\sin(\mathrm{S},\mathrm{A})\sin(\mathrm{S},\mathrm{B})}\cdot\frac{1}{\mathrm{SC}},$$

$$(6) \qquad a'b' = \mathrm{R}\,\frac{\mathrm{S}ab}{\mathrm{S}a\mathrm{C}.\mathrm{SC}b}\cdot\frac{\mathrm{SC}}{2};$$

Sab indiquant l'aire du triangle Sab, etc.

On pourra prendre pour le point S l'un des points doubles.

10. La valeur de R^2 est affectée du signe $\sqrt{-1}$, mais on voit sans peine que l'imaginarité n'est qu'apparente; car si les constantes $a, b, c, \ldots$, sont réelles, les points p et p_1 sont imaginaires, et par suite l'expression de pp_1. Si au contraire ces points sont réels, il faut que les constantes a, b, c ou a', b' et c' soient imaginaires, et alors m le sera aussi.

11. On peut, au reste, faire disparaître le signe $\sqrt{-1}$ en introduisant dans la formule le milieu q du segment pp_1 et le point C_1 conjugué harmonique du point C relativement aux points p et p_1. On a, en effet, les relations

$$\overline{pp_1}^2 = 4\,\mathrm{C}q.\mathrm{C}_1q,$$

$$\mathrm{C}p.\mathrm{C}p_1 = \mathrm{C}q.\mathrm{CC}_1;$$

d'où

$$\mathrm{R}^2 = m\,\mathrm{CC}_1\sqrt{\frac{\mathrm{C}q}{q\mathrm{C}_1}}.$$

12. Cas particuliers. 1°. *La droite* I *est à l'infini.*

On a ainsi le mode particulier d'homographie dans lequel à des droites parallèles dans l'une des figures correspondent des droites parallèles dans l'autre.

Soient dans la deuxième figure deux droites P, P_1 correspondant respectivement aux droites $y' = \pm \sqrt{-1}\, x'$ de la première. Le segment ab étant l'homologue du segment $a'b'$, menons ac parallèle à P, bc parallèle à P_1; le triangle abc correspond au triangle $a'b'c'$ du lemme, de sorte que si l'on a égard à la relation d'aire qui a lieu pour ce cas (6), on aura

$$\overline{a'b'}^2 = 4c''\sqrt{-1}\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} abc.$$

Cette relation fait voir qu'un théorème étant démontré dans le cas général (8), on aura celui qui lui correspond dans le cas actuel, en remplaçant par l'unité celles des distances $\alpha, \beta, \ldots$ qui deviennent infinies.

2°. *Les droites imaginaires* $y' = \pm \sqrt{-1}\, x'$ *de la première figure coïncident avec leurs analogues.*

Si l'on appelle S le point d'intersection des droites P et P_1 qui correspondent aux droites imaginaires de la première figure, les lignes SC, SC_1 seront à angle droit, et Sq sera perpendiculaire sur I (il faut se rappeler que les droites $y = \pm \sqrt{-1}\, x$ forment un faisceau harmonique avec les deux côtés d'un angle droit).

Dans la valeur de R^2 (11) on peut donc, au rapport $\frac{Cq}{qC_1}$, substituer son égal $\frac{\overline{SC}^2}{\overline{SC_1}^2}$, et si l'on remarque, de plus, que $CC_1 . Sq = SC . SC_1$, on aura $R^2 = \overline{SC}^2 \frac{m}{Sq}$, de sorte que la formule (1) devient

$$a'b' = \sqrt{\frac{m}{Sq}} \cdot \frac{ab . SC \sin(C . I)}{\alpha . \beta};$$

le radical est ici constant.

Si l'on exprime analytiquement que les droites $y' = \pm\sqrt{-1}\,x'$ coïncident avec leurs homologues

$$a'x' + b'y + c' = \pm\sqrt{-1}\,(ax + by + c),$$

on trouve les relations

$$a' = \pm b, \quad b' = \pm a, \quad c = c' = 0,$$

de sorte que les formules de transformations deviennent

$$x' = \frac{ax + by}{a''x + b''y + c''}, \quad y' = \frac{\mp bx \pm ay}{a''x + b''y + c''}.$$

Transformation des relations d'angles.

Transformer homographiquement les lignes trigonométriques d'un angle et l'angle lui-même.

13. Soient $a'b'c'$ un triangle, abc le triangle homographique

$$\sin a' = \frac{2\,a'b'c'}{a'b'.a'c'};$$

d'après nos relations d'aire et de segment, on a

$$a'b'c' = m\cdot\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma};$$

$$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}\,\mathrm{C}p.\mathrm{C}p_1}{pp_1}}\,\frac{ab}{\mathrm{C}a.\mathrm{C}b}\,\frac{1}{\sin(\mathrm{C},\mathrm{I})},$$

$$a'c' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}\,\mathrm{B}p.\mathrm{B}p_1}{pp_1}}\,\frac{ac}{\mathrm{B}a.bc}\,\frac{1}{\sin(\mathrm{B},\mathrm{I})};$$

dans ces formules, B et C indiquent les droites formant les côtés de l'angle a qui correspond à l'angle donné a', nous désignons par les mêmes lettres les points où ces deux droites rencontrent la droite I.

Remplaçant dans l'expression de sin a', on obtient, après simplification,

$$\sin a' = \frac{1}{2} \frac{BC.pp_1}{\sqrt{-Cp.Cp_1.Bp.Bp_1}}.$$

Soit r le rapport anharmonique des points p, p_1, B, C,

$$r = \frac{Cp}{Cp_1} : \frac{Bp}{Bp_1}:$$

on pourra mettre la relation précédente sous la forme

$$\sin a' = \frac{1}{2} \frac{1-r}{\sqrt{-r}};$$

d'où l'on déduit aussi

$$\cos a' = \frac{1}{2} \frac{1+r}{\sqrt{r}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \frac{1}{2} a' = \frac{1-\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}} \sqrt{-1}.$$

Ces formules serviront à transformer une quelconque des lignes trigonométriques d'un angle.

Si l'on veut transformer l'angle lui-même, on remarquera que les formules précédentes donnent

$$\cos a' - \sin a' \sqrt{-1} = \sqrt{r};$$

d'où

$$a' = -\frac{\log r}{2\sqrt{-1}},$$

relation très-élégante, due à M. Laguerre-Werly. On y parvient en cherchant le rapport anharmonique des droites B, C et $y = \pm \sqrt{-1}\, x$.

Transformer homographiquement la distance d'un point c' *à une droite* C'.

14. Prenons deux points arbitraires a' et b' sur la droite C', de manière à former le triangle $a'b'c'$. Désignant par h' la hauteur de ce triangle correspondant au

sommet c',

$$2a'b'c' = a'b'.h';$$

d'où

$$h' = \frac{2.a'b'c'}{a'b'}.$$

Soit abc le triangle homographique. On a

$$a'b'c' = m\cdot\frac{abc}{\alpha.\beta.\gamma},$$

et, formule (7),

$$a'b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}}{pp_1}}\cdot\frac{ab\sqrt{\pi.\pi_1}}{\alpha.\beta};$$

par suite,

$$h' = \sqrt{\frac{m.pp_1}{2\sqrt{-1}}}\,\frac{2abc}{ab.\gamma\sqrt{\pi.\pi_1}},$$

et h désignant la distance du point c à la droite ab ou C,

$$h' = \sqrt{\frac{m.pp_1}{2\sqrt{-1}}}\,\frac{h}{\gamma\sqrt{\pi.\pi_1}};$$

dans cette relation γ exprime, comme précédemment, la distance du point c à la droite p, p_1 et π, π_1 sont les distances des points fixes p et p_1 à la droite C.

La distance d'un point à une droite est égale à la distance correspondante dans la figure homographique divisée par la distance du point qui correspond au point donné à la droite I, *par la racine carré du produit des distances de deux points fixes de cette droite à la droite qui correspond à la droite donnée et multipliée par une constante.*

(*Les Applications prochainement.*)