

Déduction simple de l'expression $\Gamma(x)$ de Gauss ; d'après le docteur Zehfuss

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__356_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DÉDUCTION SIMPLE DE L'EXPRESSION $\Gamma(x)$ DE GAUSS;
D'APRÈS LE DOCTEUR ZEHFUSS.

GRUNERT, t. XXX, p. 441.

$$1. \quad 1. x = \lim_{\delta} \frac{x^{\delta} - 1}{\delta}, \quad 1. \frac{1}{x} = \lim_{\delta} \frac{1 - x^{\delta}}{\delta};$$

posons

$$\delta = \frac{1}{n}, \quad 1. x = \lim_n n \left(1 - x^{\frac{1}{n}} \right),$$

ou

$$\Gamma \mu = \int_0^1 (1. x)^{\mu-1} dx = \lim_n n^{\mu-1} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{n}} \right)^{\mu-1} dx.$$

Faisons

$$x = t^n,$$

$$\Gamma(\mu) \lim_n n^{\mu} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{n-1} dt,$$

et lorsque n est un nombre entier positif,

$$\int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{n-1} dt = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{\mu+1 \cdot \mu+2 \cdot \dots \cdot \mu+n-1};$$

d'où

$$\begin{aligned} \Gamma(\mu) &= \lim_n \frac{n^{\mu}}{\mu} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-1}{(\mu+1)(\mu+2) \cdot \dots \cdot \mu+n-1} \\ &= \lim_n \frac{1}{\mu} \cdot \frac{2}{\mu+1} \cdot \frac{3}{\mu+2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{\mu+n-1} \cdot n^{\mu-1} \\ &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{2^{\mu}}{\mu+1} \cdot \frac{2^{1-\mu} \cdot 3^{\mu}}{\mu+2} \cdot \frac{3^{1-\mu} \cdot 4^{\mu}}{\mu+3} \cdot \dots \end{aligned}$$