NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Moyennes géométriques, arithmétiques, harmoniques comparées ; d'après M. Schlomilch

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 353-355

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__353_1>

MOYENNES GÉOMÉTRIQUES, ARITHMÉTIQUES, HARMONIQUES COMPARÉES;

D'APRÈS M. SCHLOMILCH.

ZEITSHRIFT, 3e année, 1858, p. 187.

1. *Lemme. n* étant *entier positif* et $\alpha > \beta$, on a

$$(n+1)\alpha^n > \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} > (n+1)\beta^n,$$

posons

$$\alpha = \frac{n+z}{n+1}, \quad \beta = 1, \quad z > 1,$$

alors

$$\alpha > \beta;$$

il vient

$$\left(\frac{n+z}{n+1}\right)^{n+1} - 1 > z - 1,$$

$$\frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}.$$

Posons maintenant

$$\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n+z}{n+1},$$

mais $z \overset{<}{\cancel{>}} 1$; de sorte que $\alpha > \beta$.

On a encore

$$\frac{n+z}{n+1} > z^{\frac{1}{n+1}}.$$

Ainsi cette inégalité subsiste pour toute valeur de z plus grande ou moins grande que l'unité, et cesse pour $z = 1$.

Faisons

$$z = \frac{y}{x^{\frac{1}{n}}};$$

on obtient, en remplaçant z par cette valeur,

$$\text{(A)} \qquad n x^{\frac{1}{n}} + y > (n+1)(xy)^{\frac{1}{n+1}},$$

pourvu qu'on n'ait pas $x = y^n$.

2. Théorème. *La moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.*

Dans l'inégalité (A) faisons

$$n = 1, \quad x = a, \quad y = b;$$

on a

$$a + b > 2\sqrt{ab};$$

d'où

$$a + b + c > 2\sqrt{ab} + c.$$

Faisant

$$n = 2, \quad x = ab, \quad y = c,$$

on obtient

$$a + b + c > 3\sqrt{abc}.$$

Faisons

$$n = 3, \quad x = abc, \quad y = d;$$

on a

$$a + b + c + d > 4\sqrt{abcd}.$$

3. Théorème. *La moyenne géométrique est plus grande que la moyenne harmonique.*

D'après le théorème précédent,

$$\frac{1}{n}[a_2 a_3 \ldots, a_n + a_1 a_3 \ldots, a_n + a_1 a_4 \ldots, a_n + \ldots, a_1 a_2 a_3 \ldots, n_{n-1}]$$

$$> a_1 a_2 a_3 \ldots, a_n)^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\frac{1}{n} a_1 a_2 \ldots, a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) > (a_1 a_2 a_3 \ldots, a_n)^{\frac{n-1}{1}};$$

d'où

$$(a_1 a_2 \ldots, a_n)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_n}\right)}.$$

le membre à droite est la *moyenne harmonique;* donc, ...

Observation. Les a sont essentiellement des quantités réelles positives.

4. Lorsque a_1 et a_2 sont deux imaginaires conjuguées, la moyenne arithmétique est moins grande que la moyenne géométrique, et celle-ci est moindre que la moyenne harmonique.

Observation. Ainsi, les théorèmes précédents ne peuvent s'appliquer qu'aux équations dont les racines sont réelles et positives.
