NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

HOUSEL

Note sur un théorème de M. Chasles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 352-353

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__352_0>

NOTE SUR UN THÉORÈME DE M. CHASLES;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Dans un Mémoire publié en 1838 (*Journal* de M. Liouville, t. III, p. 102 et suiv.), M. Chasles parvient au théorème suivant :

« Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, le produit des distances d'une cinquième tangente quelconque à deux sommets opposés du quadrilatère, est avec le produit des distances de cette tangente aux deux autres sommets, dans un rapport constant. »

Ensuite, au moyen des propriétés du cône oblique et de ses lignes focales, l'auteur arrive à l'évaluation que voici :

Ce rapport constant est égal à celui que l'on trouverait si l'on prenait les distances de ces mêmes sommets à un foyer de la conique.

Nous allons démontrer ce dernier résultat par les formules où figurent les expressions imaginaires.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) les coordonnées des sommets du quadrilatère, et soit $y = mx + n$ l'équation d'une tangente quelconque; le rapport constant aura pour expression, d'après le premier théorème :

$$r = \frac{(y_1 - mx_1 - n)(y_3 - mx_3 - n)}{(y_2 - mx_2 - n)(y_4 - mx_4 - n)}.$$

On sait qu'un foyer de la courbe doit être considéré comme le point de concours de deux tangentes qui ont pour équations

$$y = \pm\sqrt{-1}\,(x - c).$$

Or le rapport constant, pris relativement à l'une de ces tangentes, aura pour expression

$$r = \frac{[y_1 - \sqrt{-1}(x_1 - c)][y_3 - \sqrt{-1}(x_3 - c)]}{[y_2 - \sqrt{-1}(x_2 - c)][y_4 - \sqrt{-1}(x_4 - c)]}.$$

L'autre tangente donnera une expression identique, sauf le signe du radical; donc, multipliant ces valeurs, on aura

$$r^2 = \frac{[y_1^2 + (x_1 - c)^2][y_3^2 + (x_3 - c)^2]}{[y_2^2 + (x_2 - c)^2][y_4^2 + (x_4 - c)^2]},$$

ce qui démontre la proposition.

Il est clair que le résultat est le même pour les deux foyers, mais ce théorème est déjà démontré, même pour un polygone circonscrit d'un nombre quelconque de côtés. (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 219.)