NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur le théorème segmentaire de Carnot et conséquences sur les tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 347-348
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__347_1>

NOTE

Sur le théorème segmentaire de Carnot et conséquences sur les tangentes.

On sait que ce théorème consiste dans l'égalité de deux produits segmentaires donnés par les intersections des côtés d'un polygone et d'une courbe algébrique plane.

Lorsque le nombre de côtés du polygone et le degré de la courbe sont tous deux impairs, les deux produits segmentaires ont des signes opposés; dans tout autre cas, ils ont le même signe.

Ainsi, lorsqu'un triangle coupe une droite ou toute autre ligne de degré impair, les produits sont de signes opposés; mais lorsqu'il coupe une conique ou toute autre ligne de degré pair, les produits ont même signe.

Si le triangle ABC touche une conique respectivement aux points c, a, b, le théorème de Carnot donne

$$\overline{Ac}^2 . \overline{Ba}^2 . \overline{Cb}^2 = + \overline{Ab}^2 . \overline{Bc}^2 . \overline{Ca}^2 ;$$

d'où

$$Ac.Ba.Cb = \pm Ab.Bc.Ca;$$

mais le signe — doit être rejeté, car une tangente à une conique ne peut pas couper la conique; donc

$$Ac.Ba.Cb = + Ab.Bc\ Ca.$$

Cela indique que les trois droites qui joignent les sommes et les points de contact des côtés opposés se coupent en un même point.

Si le triangle ABC touche une courbe du troisième degré aux trois points d'*inflexion* c, a, b, on a

$$\overline{Ac}^3 . \overline{Ba}^3 . \overline{Cb}^3 = - \overline{Ab}^3 . \overline{Bc}^3 . \overline{Ca}^3 ;$$

d'où

$$Ac.Ba.Cb = - Ab.Bc.Ca.$$

Ainsi, les trois points d'inflexion a, b, c sont en ligne droite, et par conséquent une courbe du troisième degré ne peut avoir quatre points d'inflexion réels; ils seraient en ligne droite : ce qui est impossible.

2°. Lorsqu'un sommet du polygone est situé à l'infini, chaque produit a un facteur de moins; car on ôte dans les deux produits les segments infinitésimaux qui sont égaux.

3°. Si un sommet est sur la courbe, les deux produits s'anulent; mais au rapport des segments devenus nuls on peut substituer le rapport des sinus des angles que forment les côtés de l'angle inscrit avec la tangente menée par le sommet de cet angle.

On conclut de là que, lorsqu'un polygone est inscrit dans une conique, et qu'on mène une tangente à chaque sommet, le produit des sinus des angles que forment les côtés respectivement avec les tangentes, en allant de droite à gauche, est égal au produit similaire en allant de gauche à droite.