GERONO

Questions d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 343-345

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__343_0>

QUESTIONS D'EXAMEN (ECOLE POLYTECHNIQUE).

Condition pour que deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *se coupent sous un angle droit. Lieu géométrique du point d'intersection.*

En désignant par α et β deux angles quelconques, les équations des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde sont, pour l'un des deux systèmes,

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\alpha+\sin.\alpha,$$

$$\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\alpha-\cos.\alpha;$$

et pour l'autre,

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\beta+\sin\beta,$$

$$\frac{y}{b}=-\frac{z}{c}\sin\beta+\cos\beta.$$

Les coordonnées d'un point commun à deux génératrices de systèmes différents sont déterminées par

$$\frac{z'}{c}=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{y'}{b}=\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\right)\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{x'}{a}=\left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\right)\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Le carré de la distance de ce point au centre de la surface a pour expression

$$(1)\quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{a^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - 6) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - 6) + c^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6)}.$$

Quand $\sin \frac{1}{2}(\alpha + 6) = 0$, les deux génératrices sont parallèles. La condition pour qu'elles soient perpendiculaires est, d'après une formule connue,

$$\frac{a^2}{c^2} \cos \alpha \cos 6 - \frac{b^2}{c^2} \sin \alpha \sin 6 + 1 = 0,$$

ou

$$(2)\qquad a^2 \cos \alpha \cos 6 - b^2 \sin \alpha \sin 6 + c^2 = 0.$$

De cette dernière relation on peut conclure que la *distance du centre de l'hyperboloïde au point d'intersection de deux génératrices rectangulaires est invariable.*

Car, en observant qu'on a, quels que soient α et 6,

$$\cos \alpha \cos 6 = \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - 6) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6),$$

$$-\sin \alpha \sin 6 = \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - 6) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6),$$

$$1 = \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6) + \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6),$$

la relation (2) devient

$$\begin{aligned} & a^2 \left[\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - 6) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6)\right] \\ + & b^2 \left[\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - 6) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6)\right] \\ + & c^2 \left[\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6) + \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + 6)\right] = 0 \end{aligned}$$

et donne successivement :

$$a^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+b^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+c^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$
$$=(a^2+b^2-c^2)\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta);$$

$$\frac{a^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+b^2\sin^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+c^2\cos^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}=a^2+b^2-c^2.$$

Il en résulte, en ayant égard à l'équation (1),

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2+b^2-c^2.$$

D'après cela, on voit que le lieu géométrique des points d'intersection des génératrices rectangulaires est celui des points communs à l'hyperboloïde et à la sphère

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$$

Pour que le rayon de cette sphère ait une valeur réelle différente de zéro, il faut d'abord que c^2 soit moindre que a^2+b^2. Quant à l'existence de points communs à la sphère et à l'hyperboloïde, elle exige que le rayon de la sphère soit au moins égal à la moitié du plus petit des deux axes de l'ellipse de *gorge* représentée par l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, puisque la plus courte distance du centre de l'hyperboloïde à un point de la surface, est précisément égale à la moitié de cet axe. Par conséquent, en supposant $b<a$, la condition de l'intersection de la sphère et de l'hyperboloïde est $a^2+b^2-c^2>b^2$, ou $c<a$. S'il y avait égalité entre a et c, la sphère serait tangente à l'hyperboloïde aux deux extrémités de l'axe $2b$, et ces deux points seraient les seuls où deux génératrices rectilignes de la surface se couperaient sous un angle droit.

G.