P. SERRET

Théorème sur les roulettes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 341-342

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__341_1>

THÉORÈME SUR LES ROULETTES;

PAR M. P. SERRET.

1. *Si l'on considère l'arc de roulette engendré par un point* o *invariablement lié à une courbe mobile, pendant que l'arc* MN *de cette courbe roule sans glisser sur une droite; et l'arc* conjugué *de la courbe-podaire, lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du même point* o (*regardé comme immobile*) *sur les diverses tangentes de l'arc* MN (*devenu fixe*) : *ces deux arcs conjugués auront même longueur.*

Ce théorème, qui est peut-être nouveau, donne lieu à plusieurs conséquences : ainsi, un arc quelconque de la podaire d'une circonférence par rapport à un point de son plan est mesuré par une portion de droite, ou par un arc d'ellipse, suivant que ce point appartient ou non à la circonférence; inversement, un arc quelconque de la roulette produite par le roulement sur une droite d'un arc d'ellipse ou de parabole, le point décrivant étant le foyer, est égal à un arc de cercle ou à une portion de droite.

Pour le démontrer, désignons par ds, ds', $d\sigma$ les arcs élémentaires correspondants de la courbe MN, de la podaire M'N' et de la roulette engendrée par le point O; soient r, r' les rayons vecteurs correspondants OM, OM', et ρ le rayon de courbure en M de la courbe MN. D'après une *expression* connue, on a

$$d\sigma = \frac{r\,ds}{\rho};$$

une formule due à Euler, $\rho = \frac{r\,dr}{dr'}$, peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dr'}{r.dr};$$

enfin, l'égalité connue des angles sous lesquels les rayons vecteurs OM, OM' coupent la courbe MN et la podaire M'N', fournit cette dernière relation : $\frac{dr}{ds} = \frac{dr'}{ds'}$, ou

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{ds'}{ds}.$$

Or si l'on multiplie membre à membre ces trois égalités, on trouve, en simplifiant, la relation $d\sigma = ds'$, qui démontre le théorème énoncé.

Note du Rédacteur. Le théorème a été énoncé et démontré par M. Steiner (Crelle, t. XXI, p. 35; 1846) et ensuite par M. Mannheim (l'*Institut*, 24 février 1858) qui m'a communiqué ce renseignement.