PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 33-44

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__33_0>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t. XVII, p. 457),

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

CHAPITRE II.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN AVEC UNE SURFACE DU SECOND ORDRE. — POINT INTÉRIEUR.

§ I. — *Intersection d'une droite avec une surface du second ordre.*

28. L'équation de la surface étant toujours

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 \\ \quad + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ \quad + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{array}\right\} = 0,$$

je prendrai les équations de la droite sous la forme générale

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0, \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Or, si l'on pose

$$(3)\quad A_{r,s} = n_rm_s - n_sm_r, \quad \text{d'où} \quad A_{r,s} = -A_{s,r};$$

on déduira des équations (2)

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{21}x_1 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4 = 0; \\ A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = 0 \end{array}\right.$$

En éliminant x_1 et x_2 entre les équations (1) et (4) on obtiendra les $\frac{x_3}{x_4}$ des points d'intersection de la droite avec la surface; on arrive ainsi à l'équation

$$(5)\qquad \mathrm{M}_{33}\,x_3^2 + 2\,\mathrm{M}_{34}\,x_3\,x_4 + \mathrm{M}_{44}\,x_4^2 = 0,$$

après avoir posé

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{M}_{33} &= a_{11}\,\mathrm{A}_{23}^2 + a_{22}\,\mathrm{A}_{13}^2 + a_{33}\,\mathrm{A}_{21}^2 - 2a_{12}\,\mathrm{A}_{23}\,\mathrm{A}_{13} \\
&\qquad - 2a_{13}\,\mathrm{A}_{21}\,\mathrm{A}_{23} - 2a_{23}\,\mathrm{A}_{12}\,\mathrm{A}_{13};\\
\mathrm{M}_{44} &= a_{11}\,\mathrm{A}_{24}^2 + a_{22}\,\mathrm{A}_{14}^2 + a_{44}\,\mathrm{A}_{21}^2 - 2a_{12}\,\mathrm{A}_{24}\,\mathrm{A}_{14} \\
&\qquad - 2a_{14}\,\mathrm{A}_{21}\,\mathrm{A}_{24} - 2a_{24}\,\mathrm{A}_{12}\,\mathrm{A}_{14};\\
\mathrm{M}_{34} &= a_{11}\,\mathrm{A}_{23}\mathrm{A}_{24} + a_{22}\,\mathrm{A}_{13}\mathrm{A}_{14} + \mathrm{A}_{34}\,\mathrm{A}_{21}^2 - a_{12}\,\mathrm{A}_{23}\,\mathrm{A}_{14} \\
&\qquad - a_{12}\,\mathrm{A}_{24}\,\mathrm{A}_{13} - a_{13}\,\mathrm{A}_{21}\,\mathrm{A}_{24} - a_{14}\,\mathrm{A}_{21}\,\mathrm{A}_{23} \\
&\qquad - a_{23}\,\mathrm{A}_{12}\,\mathrm{A}_{14} - a_{24}\,\mathrm{A}_{12}\,\mathrm{A}_{13}.
\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on désigne par V le déterminant

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0
\end{vmatrix},$$

où $a_{r,s} = a_{s,r}$, on constate, par un calcul facile, que

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{M}_{33} &= +\frac{d\mathrm{V}}{da_{44}};\\
\mathrm{M}_{34} &= -\frac{d\mathrm{V}}{da_{43}};\\
\mathrm{M}_{44} &= +\frac{d\mathrm{V}}{da_{33}}.
\end{aligned}\right.$$

Par suite, l'équation de la projection sur le plan $x_3\,x_4$ pourra s'écrire

$$(8)\qquad \frac{d\mathrm{V}}{da_{44}}\,x_3^2 - 2\,\frac{d\mathrm{V}}{da_{43}}\,x_3\,x_4 + \frac{d\mathrm{V}}{da_{33}}\,x_4^2 = 0.$$

On trouverait, par un calcul semblable, pour les équations des projections sur les deux autres plans coordonnés

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dV}{da_{44}} x_2^2 - 2\frac{dV}{da_{42}} x_2 x_4 + \frac{dV}{da_{22}} x_4^2 = 0; \\ &\frac{dV}{da_{44}} x_1^2 - 2\frac{dV}{da_{41}} x_1 x_4 + \frac{dV}{da_{11}} x_4^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Avant de discuter ces équations, je signalerai d'abord les relations

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &V\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = \frac{dV}{da_{33}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{43}}\right)^2; \\ &V\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} = \frac{dV}{da_{22}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{42}}\right)^2; \\ &V\frac{d^2V}{da_{11}\,da_{44}} = \frac{dV}{da_{11}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{41}}\right)^2; \end{aligned} \right.$$

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = (n_2 m_1 - n_1 m_2)^2; \\ &\frac{d^2Y}{da_{22}\,da_{44}} = (n_3 m_1 - n_1 m_3)^2; \\ &\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{44}} = (n_3 m_2 - n_2 m_3)^2. \end{aligned} \right.$$

29. Première hypothèse. $\frac{dV}{da_{44}}$ *est différent de zéro.*

La condition de réalité des racines de l'équation (8) est exprimée par l'inégalité

$$\frac{dV}{da_{33}}\frac{dV}{da_{44}} - \left(\frac{dV}{da_{43}}\right)^2 < 0.$$

Si l'on admet que $(n_1 m_2 - n_2 m_1)$ soit différent de zéro, cette inégalité pourra s'écrire

$$(n_1 m_2 - n_2 m_1)^2\, V < 0;$$

d'où l'on tirera les conclusions suivantes :

Il n'y a *pas intersection*, si $V > 0$;

Il y a *intersection*, si $V < 0$;

Il y a *tangence*, si $V = 0$;

car il résulte de la dernière hypothèse $V = 0$ que la projection, sur les trois plans coordonnés, des points d'intersection de la droite avec la surface se réduit à un *point unique*.

30. Si l'on avait $(n_1 m_2 - n_2 m_1) = 0$, l'étude de la projection sur le plan des $x_1\, x_2$ devrait être abandonnée; la droite est, en effet, dans un plan parallèle au plan des $x_1\, x_2$ (4).

Mais les équations (9) vont permettre de résoudre la question. Les conditions de réalité des racines seront exprimées, pour la première, par

$$(n_1 m_3 - n_3 m_1)^2 V < 0 ;$$

pour la seconde, par

$$(n_2 m_3 - n_3 m_2)^2 V < 0.$$

Or, on ne saurait avoir en même temps $(n_1 m_2 - n_2 m_1) = 0$ et $(n_1 m_3 - n_3 m_1) = 0$; car alors les deux plans représentés par les équations (2) seraient parallèles et ne donneraient plus une droite. On voit encore, dans ce cas, qu'il y aura *non-intersection*, *intersection* ou *tangence*, suivant que V sera *positif*, *négatif* ou *nul*.

31. On pourrait cependant avoir ($m_1 = 0$ et $n_1 = 0$), auquel cas la droite serait parallèle à l'axe des x_1 ; la seconde des équations (9) donnera alors la réponse à la question.

Remarquons d'abord qu'on ne peut pas supposer en même temps

$$m_1 n_3 - m_3 n_2 = 0\,;$$

car les équations (2) seraient incompatibles. Partant de là on se trouve encore conduit aux conséquences que je viens d'énoncer.

32. Seconde hypothèse. $\dfrac{dV}{da_{44}}$ *est nul.*

Nous aurons deux cas à examiner.

Premier cas : $\dfrac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}} \gtrless 0.$

La première des relations (10) donne, dans le cas actuel,

$$(12) \qquad V \frac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}} = -\left(\frac{dV}{da_{43}}\right)^2,$$

et, comme $\dfrac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}}$ est différent de zéro, il en résulte que V et $\dfrac{dV}{da_{43}}$ sont nuls en même temps. Si V est différent de zéro, il sera négatif; et on voit alors qu'il y a intersection, mais l'un des points d'intersection est à l'infini.

Si l'on a $V = 0$, il en résultera $\dfrac{dV}{da_{43}} = 0$, et réciproquement; les $\dfrac{x_3}{x_4}$ des points d'intersection sont tous deux infinis, pourvu que $\dfrac{dV}{da_{33}}$ soit différent de zéro. Les deux dernières équations (10) donnent dans cette hypothèse

$$\frac{dV}{da_{42}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{41}} = 0\,;$$

et on voit alors, (8) et (9), que la droite est *tangente à l'infini* ou *asymptotique à la surface.*

Lorsque, V étant nul, on a aussi $\dfrac{dV}{da_{33}} = 0$, on en conclut comme précédemment

$$\frac{dV}{da_{42}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{41}} = 0$$

Puis, d'après les relations

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} V\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{33}} &= \frac{dV}{da_{22}}\frac{dV}{da_{33}} - \left(\frac{dV}{da_{23}}\right)^2, \\ V\frac{d^2V}{da_{11}\,da_{33}} &= \frac{dV}{da_{11}}\frac{dV}{da_{33}} - \left(\frac{dV}{da_{13}}\right)^2, \end{aligned} \right.$$

on conclut encore

$$\frac{dV}{da_{23}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{13}} = 0.$$

Or, le déterminant V fournit les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} n_1\frac{dV}{da_{12}} + n_2\frac{dV}{da_{22}} + n_3\frac{dV}{da_{32}} + n_4\frac{dV}{da_{42}} &= 0, \\ m_1\frac{dV}{da_{12}} + m_2\frac{dV}{da_{22}} + m_3\frac{dV}{da_{32}} + m_4\frac{dV}{da_{42}} &= 0, \end{aligned} \right.$$

qui, en ayant égard aux conséquences déjà établies, donnent

$$\frac{dV}{da_{22}} = 0.$$

On trouverait de la même manière

$$\frac{dV}{da_{11}} = 0.$$

Donc, les trois équations qui déterminent les points d'intersection de la droite se réduisent à des identités, c'est-à-dire que la droite est tout entière située sur la surface. Ainsi :

Lorsque $\frac{dV}{da_{44}} = 0$, et $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0$,

Il y a *intersection*, si $V < 0$;

Il y a *tangence à l'infini*, si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{33}} \gtrless 0$;

Il y a *coïncidence*, si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{33}} = 0$.

33. *Deuxième cas.* $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = A_{12}^2 = 0$.

I°. Lorsque $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}}$ est nul sans que m_1 et n_1 soient nuls, $\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}}$ sera nécessairement différent de zéro; car autrement les équations (2) seraient incompatibles.

Si l'on pose

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1} = \lambda,$$

on en déduit

$$A_{2r} = \lambda A_{1r}. \tag{14}$$

Introduisant dans les équations (6) et (7) l'hypothèse $A_{12} = 0$, ayant égard à la relation (14), et se rappelant que $\frac{dV}{da_{44}}$ est nul, on conclut d'abord

$$\frac{dV}{da_{43}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{33}} = 0. \tag{15}$$

La droite étant parallèle au plan des $x_1\ x_2$, il faut avoir recours aux projections sur les deux autres plans coordonnés; les équations sont alors

$$(16)\quad \begin{cases} -2\frac{dV}{da_{42}}x_2 x_4 + \frac{dV}{da_{22}}X_4^2 = 0, \\ -2\frac{dV}{da_{41}}x_1 x_4 + \frac{dV}{da_{11}}X_4^2 = 0 \end{cases}$$

Si V est différent de zéro, il y aura intersection, et V dans ce cas est encore négatif (10). V étant nul, les équations (10) donnent $\frac{dV}{da_{42}} = 0$, $\frac{dV}{da_{41}} = 0$, c'est-à-dire que la droite est tangente à l'infini, si $\frac{dV}{da_{22}}$ est différent de zéro.

Supposons $\frac{dV}{da_{22}} = 0$; le déterminant V fournit les équations

$$\left\{ \begin{aligned} n_1 \frac{dV}{da_{11}} + n_2 \frac{dV}{da_{21}} + n_3 \frac{dV}{da_{31}} + n_4 \frac{dV}{da_{41}} = 0, \\ n_1 \frac{dV}{da_{12}} + n_2 \frac{dV}{da_{22}} + n_3 \frac{dV}{da_{32}} + n_4 \frac{dV}{da_{42}} = 0; \end{aligned} \right.$$

or on a déjà

$$\frac{dV}{da_{41}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{42}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{22}} = 0;$$

on a, en outre, d'après les équations (13) et (15),

$$\frac{dV}{da_{23}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{13}} = 0;$$

donc

$$\frac{dV}{da_{11}} = 0,$$

c'est-à-dire que la droite est tout entière sur la surface. Ainsi

Lorsque $\frac{dV}{da_{44}} = 0$, $\frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = 0$ et $\frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0$; alors $\frac{dV}{da_{33}} = 0$. Et

Il y a *intersection*, si $V < 0$;

Il y a *tangence*, si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{22}} \gtrless 0$;

Il y a *coïncidence* si $V = 0$ et $\frac{dV}{da_{22}} = 0$

34. II°. Supposons $(m_1 = 0,\ n_1 = 0)$, alors

$$\frac{d^2 V}{da_{33}\, da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2 V}{da_{22}\, da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2 V}{da_{22}\, da_{33}} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad A_{14} = 0.$$

Introduisons ces hypothèses dans les équations (6), il vient

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{da_{44}} &= a_{11}\, A^2_{23}; \\ \frac{dV}{da_{33}} &= a_{11}\, A^2_{24}; \\ -\frac{dV}{da_{43}} &= a_{11}\, A_{23}\, A_{24}. \end{aligned} \right.$$

Or $\frac{dV}{da_{44}} = 0$; d'un autre côté, A_{23} ne peut pas être nul; car alors les équations (2) seraient incompatibles; on a donc

$$(18) \qquad a_{11} = 0; \quad \text{par suite} \quad \frac{dV}{da_{43}} = 0, \quad \frac{dV}{da_{33}} = 0.$$

La seconde des équations (10) donne, en outre,

$$\frac{dV}{da_{42}} = 0;$$

et l'on vérifie immédiatement que

$$\frac{dV}{da_{22}} = \begin{vmatrix} 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ 0 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux premières équations des projections ne sont plus aptes à décider la question; c'est qu'en effet la droite est alors parallèle à l'axe des x_1. Mais il reste la troisième équation

$$-2\frac{dV}{da_{41}}x_1 x_4 + \frac{dV}{da_{11}}x_4^2 = o.$$

La troisième des relations (10)

$$(19) \qquad V(m_2 n_3 - m_3 n_2)^2 = -\left(\frac{dV}{da_{41}}\right)^2$$

nous montre que V et $\frac{dV}{da_{41}}$ s'annulent en même temps; et si V n'est pas nul, il est nécessairement négatif.

Nous serons ainsi conduits aux conséquences suivantes:

Lorsque $\left(\frac{dV}{da_{44}} = o, \frac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = o, \frac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} = o\right)$, alors $\frac{dV}{da_{33}} = o$, $\frac{dV}{da_{22}} = o$; et

Il y a *intersection*, si V est different de zero;

Il y a *tangence*, si $V = o$ et $\frac{dV}{da_{11}} \gtrless o$;

Il y a *coïncidence*, si $V = o$ et $\frac{dV}{da_{11}} = o$.

35. I°. Si $\frac{dV}{da_{44}} \gtrless o$,

Résumé.

Il y a *non-intersection*, lorsque $V > o$;

Il y a *intersection*, lorsque $V < o$;

Il y a *tangence*, lorsque $V = o$.

II°. Si $\frac{dV}{da_{44}} = o$,

Il y a *intersection*, lorsque V est différent de zéro.

N. B. Dans ce cas, V est toujours négatif, et l'un des points d'intersection est à l'infini.

Si $V = o$:

Premier cas. $\dfrac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} \gtrless 0,$

Il y a *tangence à l'infini,* lorsque $\dfrac{dV}{da_{33}} \gtrless 0;$

Il y a *coïncidence,* lorsque $\dfrac{dV}{da_{33}} = 0.$

Deuxième cas. $\dfrac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = 0$, et $\dfrac{d\,V}{da_{22}\,da_{44}} \gtrless 0,$

Il y a *tangence à l'infini,* lorsque $\dfrac{dV}{da_{22}} \gtrless 0;$

Il y a *coïncidence,* lorsque $\dfrac{dV}{da_{22}} = 0.$

N. B. Dans ce cas $\dfrac{dV}{da_{33}}$ est nécessairement *nul.*

Troisième cas. $\dfrac{d^2V}{da_{33}\,da_{44}} = 0$, et $\dfrac{d^2V}{da_{22}\,da_{44}} = 0,$

Il y a *tangence à l'infini,* lorsque $\dfrac{dV}{da_{11}} \gtrless 0;$

Il y a *coïncidence,* lorsque $\dfrac{dV}{da_{11}} = 0.$

N. B. Dans ce cas $\dfrac{dV}{da_{33}}$ et $\dfrac{dV}{da_{22}}$ sont *nuls.*

36. On pourra dire, plus simplement,

Il n'y a *pas intersection,* si $V > 0;$
Il y a *intersection,* si $V < 0;$
Il y a *tangence,* si $V = 0;$

pourvu que, dans le mot *tangence*, on comprenne l'asymptotisme et la coïncidence.

Remarque. Lorsque la droite est tangente, il est facile d'obtenir les coordonnées du point de contact. Si l'on se reporte, en effet, aux équations (8) et (9), et qu'on y introduise l'hypothèse $V = 0$, on trouve

$$(20)\quad x_1 = \frac{dV}{da_{41}},\quad x_2 = \frac{dV}{da_{42}},\quad x_3 = \frac{dV}{da_{43}},\quad x_4 = \frac{dV}{da_{44}}.$$

On voit que, lorsque $\frac{dV}{da_{44}}$ est nul, le point de contact est à l'infini.

La suite prochainement.