NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARDONNET

Solution de la question 481

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 339-341
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__339_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 481

(voir t. XVIII, p. 266);

PAR M. CHARDONNET (DE CHALON-SUR-SAÔNE).

Solution analytique.

L'équation de l'hyperboloïde donné rapportée à ses axes et à son centre sera

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

Soient x', y', z' les coordonnées du sommet du cône considéré; x_1, y_1, o celles d'un point quelconque du cercle de gorge; les équations de la génératrice du cône passant en ce point seront

$$x - x' = \frac{x - x_1}{z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y_1}{z'}(z - z').$$

On en tirera les valeurs suivantes de x_1 et y_1

$$x_1 = \frac{zx' - xz'}{z - z'}, \quad y_1 = \frac{zy' - yz'}{z - z'},$$

qui, portées dans l'équation du cercle de gorge, donneront pour celle du cône

$$(zx' - xz')^2 + (zy' - yz')^2 = a^2(z - z')^2,$$

dans laquelle je fais $x = 0$ pour avoir l'équation de la section par le plan des yz.

L'une des conditions pour que cette équation représente un cercle est que le coefficient du rectangle des variables soit nul. Je fais donc $y' = 0$, ce qui revient à amener le sommet du cône dans le plan des xz. L'équation de la section devient alors

$$z^2(x'^2 - a^2) + z'^2 y^2 + 2a^2 zz' = a^2$$

ou

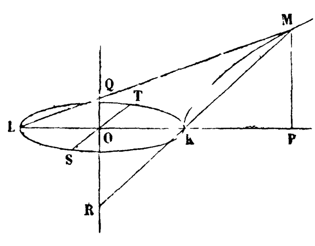
$$y^2 + z^2 + 2\frac{a^2}{z'^2}z = a^2,$$

équation d'un cercle dont le centre est sur l'axe des z. On obtiendra donc les deux systèmes de sections circulaires qu'admet le cône considéré, en le coupant par des plans perpendiculaires à l'axe des z ou à l'axe des x.

Note. Mon fils Alfred m'a remis une solution analytique identique.

Solution géométrique (Chardonnet).

On sait que toute section circulaire d'un cône oblique à base circulaire est perpendiculaire à la section principale, et que lorsqu'une section elliptique est perpendiculaire à la section principale, ses axes sont, l'un la commune intersection de son plan avec le plan principal, et



l'autre une perpendiculaire à cette ligne. Cela posé, soient O le centre du cercle de gorge, M le sommet du cône, K, L les points où le méridien du point M rencontre ce cercle. Menons les génératrices ML, MK du cône; soient Q, R les points où elles rencontrent l'axe non transverse de l'hyperboloïde, P le pied de la perpendiculaire abaissée du point M sur le diamètre LK prolongé, S, T les intersections d'un autre diamètre perpendiculaire à ce dernier avec le cercle de gorge. Les triangles semblables LOQ et LPM, KMP et KOR donneront

$$\frac{MP}{OQ}=\frac{LP}{OL}, \quad \frac{MP}{OR}=\frac{KP}{KO}; \quad \frac{\overline{MP}^2}{OQ\times OR}=\frac{LP\times KP}{\overline{OK}^2},$$

et, en remarquant que

$$\overline{MP}^2=LP\times KP,$$

il vient

$$OQ\times OR=\overline{OK}^2=\overline{OS}^2;$$

donc la section plane QSRT est un cercle. C. Q. F. D.