A. CHANSON

Solution de la question 427

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 335-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__335_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 427

(voir t. XVII, p. 45),

PAR M. A. CHANSON,
Élève du lycée de Versailles (classe de M. Vannson).

Etant donnés un angle A formé par deux grands cercles et un point O, mener par ce point un troisième cercle qui forme avec les deux autres un triangle sphérique de surface donnée.

Soit ABC le triangle cherché. J'imagine son polaire $A'B'C'$, dans lequel je connais la base $B'C'$ et la somme des deux autres côtés. D'ailleurs le point A' se trouve sur un cercle décrit de O comme pôle avec 90 degrés pour distance polaire. Le point A' connu, le problème serait résolu. On peut donc le ramener au suivant que nous résoudrons à part (II) :

Étant donnés un grand cercle MN *et deux points* B' *et* C', *trouver sur ce grand cercle un point* K *tel, que* $KB' + KC' =$ *un arc donné.*

Soit K le point cherché : prolongeons $B'K$ d'une longueur $KL = KC'$. Le point L se trouve sur un petit cercle décrit du point B' comme pôle, avec une distance polaire égale à la somme donnée. D'ailleurs c'est le point de contact d'un cercle tangent à ce dernier et passant par les deux points C', C'', symétriques par rapport à l'arc MN. Si donc nous faisons passer un petit cercle quelconque par les points C' et C'' qui coupera le petit cercle décrit de B′ comme pôle en deux points S′ et S, et que nous menions les deux cordes d'intersection C′C″ et S′S, elles se couperont en un point P qui appartient aussi à la tangente qui serait commune au cercle cherché et au cercle décrit de B′ comme pôle.

Il est facile en effet de démontrer sur la sphère comme sur le plan que les trois cordes d'intersection de trois petits cercles pris deux à deux se coupent en un même point. Le théorème sur lequel on s'appuie sur le plan pour démontrer cela, a son analogue sur la sphère.

Si d'un point A (III) on mène des arcs de grand cercle sécant à un petit cercle, on a la relation

$$\operatorname{tang}\frac{AB}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{AC}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{AD}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{AE}{2}=\text{constante}.$$

Il nous suffit donc, pour achever le problème, de mener par le point P un arc tangent au cercle décrit de B′ comme pôle ; joignant le point de contact T′ au point B′, le point S d'intersection avec l'arc MN sera le point cherché.

On voit que généralement le problème aura deux solutions, et pour le résoudre il n'y aura qu'à répéter synthétiquement les constructions précédentes.