G. SALMON

Rectification d'un théorème de MM. Steiner et Dewulf

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 314-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__314_0>

RECTIFICATION D'UN THÉORÈME DE MM. STEINER ET DEWULF;

PAR LE RÉV. G. SALMON.

Dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, p. 179, M. Dewulf donne ce théorème, qu'il attribue à M. Steiner :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de la classe n *est une courbe de degré* n^2.

Remarquons cependant que dans le cas où $n = 2$, le lieu n'est pas du degré ($n^2 =$) 4^e, mais seulement du second degré. De plus, si la courbe donnée est une parabole, le lieu est une ligne droite.

C'est ce que M. Terquem a remarqué; il dit dans une note : « Dans les coniques, ce lieu est un cercle *double.* »

Mais pourquoi *double?* (*Voir* Note finale.)

Pour moi, je ne vois pas pourquoi.

Cela m'a donné de graves soupçons que le théorème énoncé n'était pas exact.

Voyons donc la démonstration de M. Dewulf. Il réduit le problème à l'élimination de p_1, q_1, p_2, q_2 entre les cinq équations

$$(1) \qquad p_1 Y + q_1 X = 1,$$

$$(2) \qquad p_2 Y + q_2 X = 1,$$

$$(3) \qquad p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0,$$

$$(4) \qquad F(p_1 q_1) = 0,$$

$$(5) \qquad F(p_2 q_2) = 0.$$

Il dit que « les équations 4, 5 sont du degré n, les trois autres du premier degré. D'après le théorème de Bezout, l'équation finale sera du degré n^2. »

Mais l'équation (3) n'est pas du premier degré, elle est du second, et il semble que l'équation finale doit être du degré $2n^2$.

Maintenant, comme nous connaissons que, quand $n=2$, le degré est moins élevé, tout ce que l'investigation de M. Dewulf nous apprend, est que le degré du lieu *ne peut pas excéder* $2n^2$. Mais le degré peut être moins élevé, parce que des facteurs étrangers peuvent entrer dans le procédé d'élimination.

Faisons donc une nouvelle investigation du degré de ce lieu. Pour connaître ce degré, il suffit de connaître en combien de points il peut rencontrer une droite quelconque. Examinons donc en combien de points le lieu peut rencontrer la droite à l'infini.

Le sommet d'un angle sera à l'infini quand les deux côtés sont parallèles. La question donc revient à celle-ci :

Combien de fois pouvons-nous avoir deux parallèles tangentes d'une courbe de la classe n, qui se couperont à angle droit ?

Mais comment est-il possible que deux droites *parallèles* se coupent à angle droit?

Formons la condition que la droite

$$y = mx + C$$

soit perpendiculaire à la droite

$$y = mx + C',$$

et nous trouvons

$$1 + m^2 = 0.$$

Il faut donc que les droites cherchees passent par l'un ou l'autre des deux points imaginaires à l'infini $y = \pm x\sqrt{-1}$, c'est-à-dire par l'un ou l'autre des deux points où un cercle quelconque rencontre la droite à l'infini.

Je conclus donc que le lieu que nous examinons peut rencontrer la droite à l'infini seulement dans ces deux points imaginaires; mais je dis, de plus, que ces points seront points multiples du lieu, de degré $\frac{n(n-1)}{1.2}$.

Car puisque par chaque point on peut tirer n tangentes, chaque point peut être l'intersection de $\frac{n(n-1)}{1.2}$ couples de tangentes.

Je conclus donc que le degré du lieu est, non pas n^2, mais $n^2 - n$.

Peut-être ce raisonnement sera mieux entendu, si nous faisons la projection de la question.

Si la droite à l'infini est projetée en une droite AB, et les deux points où un cercle rencontre la droite à l'infini soient projetés en deux points (réels ou imaginaires) A, B, alors les projections des deux droites, qui se coupent à angle droit, couperont A, B en deux points M, T qui seront harmoniques conjugués avec A, B.

Or, il est évident que les points M, T ne peuvent pas coïncider à moins que tous les deux coïncident ou avec A ou avec B. Et puisque de n droites, il y a $\frac{n(n-1)}{1.2}$ intersections, le point A peut être, en $\frac{n(n-1)}{1.2}$ différentes manières, l'intersection de deux tangentes qui coupent AB harmoniquement.

Si la droite AB touche la courbe donnée, chaque point M de cette droite est, en $n-1$ diverses manières, un point du lieu, car il est l'intersection de la tangente AB qui passe par T avec chaque autre tangente qui passe par M.

Je crois donc que le théorème de M. Steiner doit être énoncé :

« *Le lieu des sommets des angles droits, circonscrits à une courbe de la classe* n, *est une courbe de degré* n (n — 1).

Mais si la courbe donnée est une parabole, c'est-à-dire si la droite à l'infini touche cette courbe, alors le degré du lieu sera $(n-1)^2$; *et si la droite à l'infini est une* double *tangente, ce degré sera* $(n-1)(n-2)$.

Par exemple, pour la parabole semi-cubique ($y^2 = px^3$), le lieu est une conique.

Parce qu'il y a des gens qui ne croiront à rien qui ne soit pas démontré par voie d'analyse, j'ajoute une autre investigation de ces théorèmes.

La droite $\alpha x + \beta y + \gamma$ touchera une courbe de la classe n si les constantes α, β, γ satisfont à une équation du degré n,

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

et l'équation des n tangentes à cette courbe, qu'on peut tirer par un point $x'y'$, est

$$\varphi(y - y', \quad x' - x, \quad xy' - yx') = 0;$$

et l'équation

$$\varphi(y, \ -x, \ xy' - yx') = 0$$

représentera n droites par l'origine parallèles à ces n tangentes. Cette équation est de degré n aussi bien en x', y' qu'en x, y.

Maintenant, nous désirons former la condition que deux de ces droites soient réciproquement perpendiculaires.

Pour cela, il suffit de former la condition que deux racines cette équation en x, y soient de la forme m et $-\frac{1}{m}$.

Je dis que cette condition est du degré $n-1$ dans les coefficients de l'équation : ainsi du degré $n(n-1)$ en x', y'.

Par exemple, la condition que l'équation

$$Ax^2 + Bxy^2 + Cy^2$$

$\left(\text{qui est de degré second en } \frac{x}{y}\right)$ peut avoir deux racines α, β qui satisfont à la condition $\alpha\beta = -1$ est $A + C = 0$ ou du premier degré dans les coefficients.

La condition que la cubique

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$$

peut avoir deux racines α, β qui satisfont à la condition $\alpha\beta = -1$ est (comme on voit facilement)

$$A^2 + D^2 + AC + BD = 0,$$

ou du second degré dans les coefficients.

De même pour une équation de quatrième degré, la condition est du troisième dans les coefficients.

Note du Rédacteur. Depuis longtemps M. Dewulf m'a indiqué les rectifications signalées ici par le célèbre analyste. Mon intention était de ne les publier qu'avec un Mémoire intéressant de ce savant militaire sur les polaires inclinées, ce qui aura lieu prochainement.

Lorsqu'on circonscrit un angle *donné* à une conique, le lieu du sommet est du quatrième degré; la courbe est formée de deux parties, l'une relative à l'angle donné, et l'autre à son supplément; moins l'angle diffère de son supplément, plus les deux parties se rapprochent. Lorsque la différence est nulle (angle droit), les deux parties se confondent en un *cercle*, qui est pour ainsi dire *double*. Il est *biquadratique*, mais *carré* d'une forme quadratique. Dans l'analyse géométrique, il existe des *lignes multiples* aussi bien que des points et des tangentes multiples. Ce sont ces diverses multiplicités qui amènent des *abaissements* réels quant aux formes géométriques, mais qui ne sont qu'apparents sous le point de vue analytique. Il reste donc encore quelque chose à éclaircir dans cette question.