TOUSSAINT

Sur les limites des racines

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 310-313

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__310_0>

SUR LES LIMITES DES RACINES;

PAR M. TOUSSAINT,
Professeur au lycée de Caen.

Dans le numéro du mois de juin des *Annales*, on lit une Note relative à la limite supérieure des racines négatives, déduite de la formule aux différences de Newton; voici quelques observations qui me paraissent propres à compléter cette théorie.

Prenons un exemple particulier : soit à traiter l'équation

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = 0.$$

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	-14	$+9$	-6	$+12$
0	-5	$+3$	$+6$	
$+1$	-2	$+9$		
$+7$	$+2$			

Je vais démontrer que lorsqu'on est arrivé à un nombre x_0 tel, que u et toutes les différences écrites sur une même ligne horizontale soient alternativement positives et négatives, ce nombre sera une limite inférieure des racines de l'équation. Il suffit pour cela de faire voir que pour toute valeur de x moindre que x_0, telle que $x_0 - y$, le premier membre ne peut plus changer de signe.

Pour cela, je reprends la fonction

$$u_x = u_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots$$

Posons l'accroissement $x - x_0\, y$, et au lieu de u_x écrivons

$f(x)$ ou, comme $x = x_0 + y$, $f(x_0+y)$, il vient

$$f(x_0+y) = f(x_0) + \frac{y}{h}\Delta f(x_0) + \frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2} + \ldots.$$

Changeons y en $-y$, il vient

$$f(x_0-y) = f(x_0) - \frac{y}{h}\Delta f(x_0) + \frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}+1\right)\frac{\Delta^2 f(x)}{1.2} - \ldots.$$

Les coefficients des termes de ce polynôme sont alternativement positifs et négatifs, mais comme les quantités $f(x_0)$, $\Delta f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$, ... sont aussi alternativement positives et négatives, il en résulte que tous les termes de ce développement auront le même signe; donc $f(x_0-y)$ ne peut plus devenir nul. Donc....

Le Programme de Mathématiques spéciales énonce le théorème suivant :

Si la différence h *et les quantités* u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0 \ldots \Delta^m u_0$ *sont positives*, $x_0 + (m-1)h$ *est une limite supérieure des racines positives de l'équation* $f(x) = 0$.

Ce théorème donne une limite supérieure trop éloignée; il est facile d'en établir une qui est généralement beaucoup plus rapprochée. Voici comment :

Si l'on arrive à un nombre x_0 tel, que la valeur de u, la valeur de Δ précédente d'un rang, celle de Δ^2 en remontant encore d'un rang, et ainsi de suite, soient toutes de même signe, ce nombre sera une limite supérieure de l'équation.

Pour le démontrer, je représente par Δ' les différences correspondantes non plus à un accroissement h, mais à un accroissement $-h$; de sorte que

$$f(x_0-h) - f(x_0) = \Delta' f(x_0);$$

dans $f(x_0+y)$ je change h en $-h$, et je remplace alors les Δ par des Δ'; il vient

$$f(x_0+y) = f(x_0) - \frac{y}{h}\Delta' f(x_0) + \frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right)\frac{\Delta'^2 f(x_0)}{1.2} - \ldots;$$

les coefficients sont alternativement positifs et négatifs.

Exprimons maintenant les Δ' en fonction de Δ; or on a

$$\Delta' f(x_0) = -[(f x_0) - f(x_0 - h)] = -\Delta f(x_0) - h.$$

Ceci nous montre que, pour avoir la différence en Δ' d'une fonction, il faut prendre la différence en Δ de cette fonction, y remplacer x_0 par $x_0 - h$, et changer son signe.

Or, si l'on remarque que,

$$\Delta'^2 f(x_0) = \Delta'[\Delta' f(x_0)],$$

que

$$\Delta'^3 f(x_0) = \Delta'[\Delta'^2 f(x_0)] \ldots,$$

et qu'on applique la loi ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned}
\Delta' f(x_0) &= -\Delta f(x_0 - h),\\
\Delta'^2 f(x_0) &= \Delta^2 f(x_0 - 2h),\\
\Delta'^3 f(x_0) &= -\Delta^3 f(x_0 - 3h) \ldots;
\end{aligned}$$

en substituant dans le développement, il vient

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + \frac{y}{h}\Delta f(x_0 - h) + \frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0 - 2h)}{1.2}$$
$$+ \frac{y}{h}\left(\frac{y}{h} + 1\right)\left(\frac{y}{h} + 2\right)\frac{\Delta^3 f(x_0 + 3h)}{1.2.3} + \ldots.$$

Les coefficients sont tous positifs; or nous supposons que $f(x_0)$, $\Delta f(x_0 - h)$, $\Delta^2 f(x_0 - 2h)\ldots$ sont tous aussi de même signe : donc $f(x_0 + y)$ ne peut pas être nul, quelque valeur qu'on attribue à y. Donc x_0 est une limite supérieure des racines de l'équation.

En appliquant ceci à l'équation ci-dessus, nous aurons pour limite inférieure des racines, -1, et pour limite supérieure, $+2$; le théorème du programme nous aurait donné 4 pour limite supérieure.

Je terminerai cette petite Note en établissant une formule symbolique très-facile à retenir, et qui permet de calculer les différences correspondantes à un intervalle h' de la variable en fonction des différences correspondantes à un intervalle h. Nous avons

$$f(x_0+h')=(x_0)+\frac{h'}{h}\Delta f(x_0)+\frac{h'}{h}\left(\frac{h'}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2}+\ldots.$$

Soit δ, δ^2,... les différences correspondantes à l'intervalle h' de la variable; on aura

$$\delta f(x_0)=f(x_0+h')-(x_0)=\frac{h'}{h}\Delta u_0+\frac{h'}{h}\left(\frac{h'}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{1.2}+\ldots,$$

ou bien, symboliquement,

$$\delta u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]u_0.$$

Appliquons cette formule non plus à u_0, mais à la fonction δu_0, nous aurons

$$\delta^2 u_0=\delta.\delta u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]\delta u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]^2 u_0,$$

et ainsi de suite, on a généralement la formule symbolique

$$\delta^n u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{h'}{h}}-1\right]^n u_0.$$

Dans le cas ordinaire $\frac{h'}{h}=\frac{1}{10}$,

et l'on a

$$\delta^n u_0=\left[(1+\Delta)^{\frac{1}{10}}-1\right]^n u_0,$$

formule que les élèves retiennent facilement. On ne prend que les termes du développement dans lesquels l'indice Δ ne dépasse pas le degré de l'équation que l'on traite, puisque si l'équation est du degré m, les différences d'un ordre supérieur à m sont nulles.