NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. MANNHEIM

Note sur la théorie des polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 308-309

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__308_1>

NOTE SUR LA THÉORIE DES POLAIRES RÉCIPROQUES;

PAR M. A. MANNHEIM.

Étant donnés une conique M, *un point* d *et sa polaire* F *par rapport à* M; *trouver un cercle directeur de centre* o *tel, que la polaire réciproque de* M *ait pour foyer le pôle de* F *par rapport à* o, *et par suite pour directrice la polaire de* d *par rapport à la même courbe.*

Prenons sur F des points conjugués a et b, a' et b', etc.; on sait que ces points sont en involution.

Par suite, si sur ab, $a'b'$, etc., comme diamètre on décrit des circonférences, celles-ci se coupent en deux points fixes; ces deux points sont les centres des cercles directeurs demandés.

Désignons par o l'un de ces centres et par l le point où la ligne od coupe F. Joignons le point l au point t où ad coupe M; soit g le point où la ligne lt coupe oa; on a toujours, quel que soit le point a et par suite le point t:

$$\frac{\sin . aot}{\sin . tol} = \text{const.},$$

$$\frac{1}{og} - \frac{1}{oa} = \text{const.}$$

D'après cette dernière équation, le point g décrit une conique qui a pour foyer le point o, pour directrice la droite F, et que nous désignerons par N. La tangente en g à cette conique passe par b; on voit donc que le point l est un centre d'homologie de N et de M, et que F est l'axe d'homologie.

Nous sommes arrivés à la conique N en partant de M; on peut faire l'inverse en se donnant la conique N, son foyer o, sa directrice F et un point quelconque d.

Pour vérifier les résultats que nous avons énoncés dans cette Note, il suffit de les transformer au moyen de la théorie des polaires, en prenant pour courbe directrice un cercle décrit du point o comme centre.

On retrouvera ainsi les théorèmes connus, que nous avons primitivement choisis, et d'où nous sommes partis pour arriver à la solution précédente.

Nous ferons remarquer, en terminant, que pour obtenir des propriétés de la droite F, il suffit de transformer des propriétés du foyer d'une conique.

Ainsi, par exemple : *Deux tangentes fixes d'une conique interceptent, sur une tangente mobile, un segment qui est toujours vu du foyer sous un angle constant;* on en déduit que, *si l'on joint deux points fixes de* M *à un point quelconque de cette courbe, on obtient deux droites qui interceptent sur* F *un segment qui est toujours vu du point* o *sous un angle constant.*