Nouvelles annales de mathématiques

Discriminants

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 299-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__299_0>

DISCRIMINANTS

(voir p. 249).

9. Soit

1°. $$U = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Égalons à zéro les deux dérivées par rapport à x et par rapport à y, on a

$$ax + by = 0,$$
$$by + cx = 0;$$

éliminant les variables, on trouve

$$ac - b^2 = 0.$$

Cette quantité $ac - b^2$ est dite le *discriminant* de la fonction U; on voit que le discriminant est aussi un invariant de U (p. 254).

C'est celui qui donne l'*espèce* dans les coniques.

2°. $$U = (a, b, c, d, e, f)(x, y, z)^2;$$

les trois dérivées sont

$$ax + fy + ez = 0,$$
$$fx + by + dz = 0,$$
$$ex + dy + cz = 0;$$

éliminant, on trouve

$$abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2 = 0;$$

c'est le discriminant de la fonction U, c'est aussi l'invariant (p. 254); par des relations d'identité ce discriminant et ses dérivées donnent la discussion complète et les propriétés fondamentales des coniques, et cela existe aussi pour des lignes de degré supérieur (n° 7).

3°. $$U = (a, b, c, d)(x, y)^3;$$

les dérivées sont

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$
$$bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0;$$

l'élimination donne

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = 0;$$

c'est le discriminant de la fonction U, et c'est aussi un invariant.

Nous allons démontrer que tout discriminant est un invariant : par conséquent, la recherche des invariants se ramène à cette élimination; mais cette démonstration exige quelques préparations.

Relations entre les coefficients d'une équation homogène et ses racines.

10. Soient

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n = 0.$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n},$$

les n racines de cette équation; le produit des n facteurs est

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_2}{y_2}\right)\ldots\left(\frac{x}{y} - \frac{x_n}{y_n}\right) = 0,$$

ou bien, en ôtant les diviseurs,

$$(y_1 x - x_1 y)(y_2 x - x_2 y)\ldots(y_n x - x_n y).$$

Comparant cette équation à U, on trouve

$$a_0 = y_1 y_2 y_3 \ldots\ldots y_n,$$
$$a_1 = -\sum y_1 x_2 x_3 \ldots x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = (-1)^n x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$

11. Problème. *Exprimer le discriminant d'un* quantic *en fonction des racines de ce quantic.*

Solution.

$$U = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2)\ldots(xy_n - yx_n) = 0,$$

$$\frac{dU}{dx} = y_1(xy_2 - yx_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(xy_n - yx_n)$$
$$+ y_2(xy_1 - yx_1)(xy_3 - yx_3)\ldots(xy_n - yx_n) + \ldots;$$

la propriété des équations homogènes donne

$$xU = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy};$$

par conséquent, les racines communes à U et à $\frac{dU}{dx}$ annulent aussi $\frac{dU}{dy}$. Ces racines communes sont donc celles du discriminant; or la racine $\frac{x_1}{y_1}$ de U, substituée dans $\frac{dU}{dx}$, donne pour résultat

$$y_1(x_1y_2 - y_1x_2)(x_1y_3 - y_1x_3)\ldots;$$

la racine $\frac{x_2}{y_2}$ de U donne, par une semblable substitution,

$$y_2(x_2y_1 - y_2x_1)(x_2y_3 - x_3y_2)\ldots.$$

Le produit suivant donne toutes les racines communes à U et à $\frac{dU}{dx}$,

$$y_1y_2\ldots y_n(x_1y_2 - y_1x_2)^2(x_1y_3 - y_1x_3)^2\ldots(x_2y_3 - x_3y_2)^2\ldots,$$

et divisant par $y_1y_2\ldots y_n$.

On a pour discriminant

$$(x_1y_2 - y_1x_2)^2(x_1y_3 - y_1x_3)^2\ldots = 0;$$

c'est le discriminant de U.

Si nous faisons partout les y égaux à l'unité, on voit que le discriminant est le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines de

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n,$$

théorème connu.

12. Théorème. *Pour tout* quantic *binaire le discriminant est un invariant.*

Démonstration. Même notation que ci-dessus (n° 11). U étant transformé en U_1 par le remplacement de $\alpha_1 x + \beta_1 y$ pour x et $\alpha_2 x + \beta_2 y$ pour y, le facteur $xy_1 - yx_1$ devient

$$xY_1 - yX_1 \quad \text{ou} \quad y_1(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1) - x_1(\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1);$$

ainsi

$$X_1 = -(\beta_1 y_1 - \beta_2 x_1), \quad Y_1 = \alpha_1 y_1 - \alpha_2 x_1;$$

de même,

$$X_2 = -(\beta_1 y_2 - \beta_2 x_2), \quad Y_2 = \alpha_1 y_2 - \alpha_2 x_2;$$

donc

$$(X_1 Y_2 - Y_1 X_2)^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2.$$

Le discriminant de la transformée U_1 est donc égal à la fonction U multipliée par une puissance du module; ce discriminant est donc une fonction de coefficient de U_1 égale à une fonction semblable de coefficient de U multipliée par une puissance du module. Ce discriminant est donc un invariant de U.

13. Théorème. *Le discriminant d'un* quantic *renfermant un nombre quelconque de variables est un invariant.*

Démonstration. Soit

$$U = a$$

un *quantic* à n variables et avec des coefficients représentés par des a avec divers indices. Soit

$$\Delta = 0$$

le discriminant de U, obtenu comme il a été dit ci-dessus, par élimination, et qui sera une fonction entière des a. Soit

$$U_1 = 0$$

la fonction U, *linéairement* transformée; les a seront remplacés par des A, et soit $\Delta_1 = \varphi$ le discriminant de U_1; on déduit Δ_1 de Δ en remplaçant dans Δ les a par des A.

Supposons que U renferme un facteur *multiple*, ce facteur existera dans toutes les dérivées de U par rapport aux variables, et, par conséquent, en ce cas le discriminant Δ s'évanouira identiquement; mais dans la même hypothèse U_1 contiendra aussi un facteur multiple, et, par conséquent, Δ_1 doit aussi s'évanouir identiquement; il faut donc que Δ et Δ_1 puissent s'évanouir simultanément; l'un doit être un facteur de l'autre, et, par conséquent, Δ est un invariant.

14. Soit le *quantic*

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x, y)^4 = 0,$$

ayant pour racines $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \frac{x_4}{y_4}$ correspondant aux racines ordinaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Si l'on a une fonction symétrique de ces racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, telles, que chaque terme renferme les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ un même nombre de fois, la somme de cette fonction exprimée en fonction des coefficients de l'équation est un invariant; car chaque terme est un produit de facteurs de la forme $x_1 y_2 - y_1 x_2$, le tout divisé par le produit $y_1 y_2 y_3 y_4$, c'est-à-dire par a_0; par conséquent, d'après le théorème du n° **12**, c'est un invariant. Cela n'aurait pas lieu si les racines ne se trouvaient pas dans chaque terme. Exemple: soit la fonction symétrique $\sum (\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2$; remplaçant par les formes en x et y, on aura

$$\frac{1}{a_0}\left[\begin{array}{l} (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 (x_3 y_4 - y_3 x_4)^2 \\ + (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 (x_2 y_4 - y_2 x_4)^2 \\ + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2 (x_1 y_4 - y_1 x_4)^2 \end{array}\right] = 24(3a_2^2 - 4a_1 a_3 + a_4 a_0

ce qui donne un invariant; mais

$$\sum(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2$$
$$+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2;$$

remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{a_0}[y_3^2 y_4^2(x_1 y_2-y_1 x_2)^2+y_2^2 y_4^2(x_1 y_3-y_1 x_3)^2+\ldots];$$

ce qui ne donne plus un invariant pour le *sextic*

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)(x; y)^6,$$

la fonction symétrique

$$\sum(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$$

n'est plus un invariant, mais bien

$$\sum(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2(\varepsilon-\zeta)^2.$$

On peut donc trouver une infinité d'invariants; la fonction

$$\sum(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2$$

n'est pas un invariant, car α s'y trouve trois fois et β deux fois seulement.

15. Il y a donc une infinité d'invariants. Tout discriminant est un invariant, mais tout invariant n'est pas un discriminant; nous verrons qu'il y a encore d'autres méthodes, et bien moins pénibles, de trouver des invariants.

L'excellent et indispensable travail de M. Painvin sur les surfaces quadratiques montre que la discussion complète et les principales propriétés de ces surfaces découlent du discriminant de la fonction quaternaire quadratique et de ses diverses dérivées; ce qui a probablement lieu pour les surfaces d'ordre supérieur.