J. DE VIRIEU

Seconde solution de la question 461

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 273-277
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__273_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 461

(voir page 242);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Regent à Saumur.

I. La sommation de la série proposée peut se déduire du théorème suivant qui fait connaître une infinité de séries convergentes et leurs sommes.

Soient x_0 une quantité entière nulle, positive ou négative; x une variable entière; u_x une fonction de cette variable qui, lorsque cette dernière croît de x_0 inclusivement à l'infini positif, reste toujours déterminée ainsi que

Δu_x et tend vers une limite unique finie ou nulle. U représentant cette limite, on a

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \Delta u_x = \mathrm{U} - u_{x_0}.$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'équation connue

$$u_{x_0+i+1} = u_{x_0} + \Delta u_{x_0} + \Delta u_{x_0+1} + \ldots + \Delta u_{x_0+i}.$$

III. Soient p, q des nombres entiers absolus non nuls; f, g des quantités entières distinctes telles, que

$$f + x_0 \overline{\gtrless} 1, \quad g + x_0 \overline{\gtrless} 1.$$

Si

$$u_x = \frac{1}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p-1)},$$

on a

$$\mathrm{U} = 0, \quad \Delta u_x = -\frac{p}{x+f+p} \cdot u_x.$$

Si

$$u_x = \frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p-1)},$$

on a

$$\mathrm{U} = 1, \quad \Delta u_x = -p(g-f)\frac{u_x}{(x+g)(x+f+p)}.$$

Si

$$u_x = \frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p+q-1)},$$

on a

$$\mathrm{U} = 0, \quad \Delta u_x = -\frac{q(x+g)+p(g-f)}{(x+g)(x+f+p+q)}\, u_x.$$

Si

$$u_x = \sqrt{\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p-1)}},$$

on a

$$U = 1,$$

$$\Delta u_x = p(f-g)\frac{\sqrt{\frac{1}{x+g}\cdot\frac{(x+g)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)\ldots(x+f+p)}}}{\sqrt{(x+f)(x+g+p)}+\sqrt{(x+g)(x+f+g)}}.$$

Si

$$u_x = \log\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+p+1)\ldots(x+f+p-1)},$$

on a

$$U = 0, \quad \Delta u_x = -\log\left(\frac{x+g}{x+f}\cdot\frac{x+f+p}{x+g+p}\right).$$

III. Substituant ces valeurs et ces limites successivement dans l'équation A, on obtient

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty}\frac{1}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p)}$$

$$=\frac{1}{p}\,\frac{1}{(x_0+f)(x_0+f-1)\ldots(x_0+f+p-1)},$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty}\frac{1}{x+g}\cdot\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p)}$$

$$=\frac{1}{p}\,\frac{1}{g-f}\left[\frac{(x_0+g)(x_0+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p-1)}-1\right],$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty}\frac{q(x+g)+p(g-f)}{x+g}$$

$$\times\frac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p+q)}$$

$$=\frac{(x_0+g)(x+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p+q-1)},$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{1}{x+g}\cdot\dfrac{(x+g)(x+g+1)\ldots(x+q+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\ldots(x+f+p+q)}}}{\sqrt{(x+f)(x+q+p)}+\sqrt{(x+g)(x+f+p)}}$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{f-g}\left[1-\sqrt{\frac{(x_0+q)(x_0+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p-1)}}\right],$$

$$\sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \log\left(\frac{x+g}{x+f}\cdot\frac{x+f+p}{x+g+p}\right)$$

$$=\log\left[\frac{(x_0+g)(x_0+g+1)\ldots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\ldots(x_0+f+p-1)}\right].$$

On aura la série proposée en posant

$$x_0=0,\quad f=1,\quad p=n-1$$

dans la première des formules ci-dessus.

IV. Soient m, n, b, c des quantités non nulles telles, que

$$cm=bn \lesseqgtr 0;$$

et α une quantité non nulle telle, que la fonction $b\alpha^x+c$ ne soit jamais nulle quand on fait croître x de x_0 à $+\infty$.

Posons

$$u_x=\frac{m\alpha^x+n}{b\alpha^x+c},$$

$$\Delta u_x=(cm-bn)(\alpha-1)\frac{\alpha^x}{(b\alpha^{x+1}+c)(b\alpha^x+c)}.$$

Si

$$\alpha=+1,$$

u_x n'est pas une fonction de x; si

$$\alpha=-1,$$

la limite n'est pas unique.

$$0 > \alpha^2 < 1, \quad U = \frac{n}{c}; \quad \text{si} \quad 1 < \alpha^2, \quad U = \frac{m}{b}.$$

Substituant dans A

$$0 < \alpha^2 < 1, \quad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\alpha^x}{(b\,\alpha^{x+1} + c)(b\,\alpha^x + c)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha^{x_0}}{b\,\alpha^{x_0} + c},$$

$$1 < \alpha^2, \quad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\alpha^x}{(b\,\alpha^{x+1} + c)(b\,\alpha^x + c)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{b\,\alpha^{x_0} + c}.$$