ABEL TRANSON

Sur les courbes du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 266-273

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__266_2>

SUR LES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. ABEL TRANSON.

Dans la note XX de son *Histoire des Méthodes en géométrie* (p. 348, 1837), M. Chasles fonde la double génération des courbes du troisième degré, soit par cinq paraboles divergentes, soit par cinq courbes à centre, sur une propriété très-curieuse de leurs points d'inflexion, propriété qu'il ne démontre pas, mais qu'il annonce comme pouvant se déduire avec facilité de quelques considérations de géométrie.

On peut suivre une autre marche qui consiste à établir premièrement l'une ou l'autre des deux générations, puis à en déduire la propriété des points d'inflexion, et de là le second mode de génération.

Si l'on veut prouver, par exemple, le théorème de Newton que toutes les courbes du troisième ordre sont données par la perspective de cinq paraboles divergentes, il suffira de prouver que par la perspective on peut amener l'équation d'une quelconque de ces courbes à la forme

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

qui est la forme générale des paraboles divergentes. Or une courbe quelconque du troisième ordre a au moins un point d'inflexion, puisque l'équation qui donne les abscisses de ses points d'inflexion est du quinzième degré (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 294), et que d'ailleurs l'équation de la courbe a pu être choisie de telle sorte, qu'à une valeur réelle de l'abscisse correspondît au moins une valeur réelle de l'ordonnée.

D'après cela, faisons la perspective de la courbe proposée, de sorte que la tangente à son point d'inflexion passe tout entière à l'infini.

La courbe ainsi transformée a donc une asymptote à l'infini, et je dis qu'elle n'en a pas d'autre.

En effet, le point à l'infini d'une seconde asymptote, point qui appartiendrait à la courbe, pourrait être considéré comme appartenant aussi à la première asymptote; mais cela est impossible, puisque celle-ci a déjà trois points en commun avec la courbe.

Et ce peu de mots suffirait déjà pour prouver la transformation de toute courbe du troisième ordre en une courbe purement parabolique. Mais il importe pour notre objet actuel d'obtenir l'équation de la courbe transformée.

Supposons donc premièrement que l'axe des y soit pris dans la direction de cette asymptote unique qui est à l'infini. Puis, dans l'équation de la courbe transformée, remplaçons y par mx, et écrivons-la conformément aux notations convenues dans la théorie des asymptotes, sous cette forme

$$x^3\,F(m) + x^2\,F_1(m) + x\,F_2(m) + k = 0.$$

Il faudra pour satisfaire aux conditions de la question que $F(m)$ ait trois racines infinies, et que $F_1(\infty)$ ne soit pas nul; c'est-à-dire que l'équation de la courbe transformée doit être comme il suit

$$ax^3 + bx^2 + cxy + dy^2 + ex + fy + g = 0,$$

avec la condition expresse que d ne soit pas nul. Maintenant on pourra, en conservant l'axe des y, changer la direction de l'axe des x de sorte que le terme en xy disparaisse; puis on transportera l'origine sur l'axe des y de manière à faire disparaître le terme de premier degré en y. Dès lors l'équation prendra la forme ci-dessus indiquée, savoir

$$(1) \qquad y^2 = A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D.$$

Or en discutant les diverses circonstances que peuvent présenter les trois racines de l'équation formée par le second membre égalé à zéro, on démontrera aisément l'existence de cinq cas ou formes distinctes qui ne peuvent pas rentrer les unes dans les autres par les transformations de la perspective. Et parce que toute courbe du troisième ordre prend par la perspective une forme comprise dans l'équation (1), il s'ensuit qu'elle peut toujours être considérée comme la perspective de l'une des cinq paraboles.

L'équation

$$y^2 = (x - a)^2 (x - b)$$

présente deux formes selon qu'on a $b > a$ ou $b < a$.

Considérons maintenant que pour la courbe représentée par l'équation (1), l'axe des x est diamètre de toutes les cordes parallèles à l'axe des y, c'est-à-dire passant par le point d'inflexion qui est à l'infini; de plus, les lignes qui joignent deux à deux les points où deux telles cordes rencontrent la courbe, se rencontrent elles-mêmes sur l'axe des x; et enfin les tangentes aux deux extrémités de l'une de ces mêmes cordes se rencontrent également sur ce même axe.

Donc si l'on revient à la courbe dont l'équation (1) est la perspective pour y chercher les faits correspondants à ceux qu'on vient d'énumérer, on reconnaîtra la vérité des propositions suivantes énoncées dans la note citée.

« Si autour d'un point d'inflexion d'une courbe du troisième degré on fait tourner une transversale, et qu'aux deux points où elle coupera la courbe, on mène les deux tangentes, leur point de concours engendrera une ligne droite.

» Les droites qui joindront deux à deux les points où deux de ces transversales rencontrent la courbe, se rencontreront sur cette droite.

» Enfin cette droite rencontrera chaque transversale en un point qui sera le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points où la transversale rencontrera la courbe. » (P. 349).

De plus, remarquez que la tangente à la courbe (1) est parallèle à l'axe des y dans les points situés sur l'axe des

x; donc si l'on revient à la courbe primitive, on reconnaîtra que par un point d'inflexion on peut généralement mener trois tangentes à la courbe (on ne comprend pas dans ce nombre la tangente menée au point d'inflexion lui-même), et que les trois points de contact sont sur la droite dont il vient d'être question (*).

C'est pourquoi cette droite, dit M. Chasles, et le point d'inflexion jouissent, par rapport à la courbe, des mêmes propriétés qu'un point et sa *polaire* par rapport à une conique. Et l'auteur l'appelle effectivement la *polaire* du point d'inflexion.

La construction de l'équation (1) suffit encore pour démontrer la propriété des points d'inflexion d'être en ligne droite.

En effet, si, outre le point d'inflexion à l'infini, il y en a quelque part un autre, la symétrie par rapport à l'axe des x exige qu'il y en ait un troisième de l'autre côté de l'axe et correspondant à la même abscisse. Donc ces deux nouveaux points sont sur une droite qui rencontre le premier à l'infini. D'ailleurs un quatrième point d'inflexion ne saurait exister à moins d'être extérieur à la ligne des trois premiers; mais son existence entraînerait celle de trois nouveaux points sur les trois lignes qui joindraient ce quatrième aux trois premiers. Ces trois nouveaux en feraient connaître d'autres encore, et ainsi de suite indéfiniment, ce qui est impossible. Donc, lorsqu'il y a plus d'un point d'inflexion, il y en a trois et les trois sont en ligne droite.

La forme de l'équation (1) suffira également pour prouver que les deux polaires relatives aux deux nouveaux points d'inflexion se rencontrent sur l'axe des x qui est la polaire du point à l'infini. De là ce théorème :

(*) La tangente au point d'inflexion equivaut a trois tangentes. TM.

Théorème. *Dans toute courbe du troisième ordre, les trois polaires relatives aux trois points d'inflexion se rencontrent en un même point.*

L'existence d'une polaire pour chacun des points d'inflexion étant démontrée, si, au lieu de faire passer à l'infini la tangente à un point d'inflexion, on y fait passer sa polaire, ce point devient manifestement un centre. Par là il est prouvé que toute courbe du troisième degré peut être considérée comme la perspective ou l'*ombre* d'une courbe à centre, et par suite il se trouve également prouvé qu'il y a dans le troisième ordre cinq courbes à centre non transformables les unes dans les autres. Ce beau théorème, dû à M. Chasles, devient ainsi le pendant de celui que Newton avait signalé.

Après cela il n'est peut être pas sans intérêt de montrer qu'il est possible, comme je l'ai indiqué ci-dessus, d'établir toute cette théorie en commençant par démontrer le nouveau mode de génération.

A cet effet, on remarquera premièrement qu'en vertu du théorème énoncé sous le n° 12 à la page 287 du tome IX des *Nouvelles Annales*, les trois tangentes à une courbe du troisième ordre issues d'un même point d'inflexion I, ont leurs trois points de contact A, B, C en ligne droite. Car soit C′ le point où la droite AB rencontre la courbe, la tangente en C′ doit rencontrer de nouveau la courbe en un point qui, d'après le théorème donné, sera sur la tangente en I, c'est-à-dire au point I lui-même, puisque celui-ci est un point d'inflexion. Donc le point C′ ne peut être que le point C.

Faisons passer à l'infini cette droite des trois contacts, la courbe transformée aura trois asymptotes passant par le point d'inflexion. Que si l'on place en ce point l'origine des coordonnées et si, pour plus de simplicité, on prend la tangente en ce même point pour axe des x, on connaîtra par la théorie des asymptotes que l'équation de la transformée doit avoir la forme

$$(2) \qquad x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3 + 3dy = 0.$$

Dès lors il est manifeste que par effet de la perspective le point d'inflexion est devenu centre, ce qui établit en même temps la relation harmonique entre ce point et la droite des contacts.

A la vérité il peut arriver que deux des tangentes issues d'un même point d'inflexion deviennent imaginaires; mais le *principe de continuité* de M. Poncelet ou des *relations contingentes* de M. Chasles, suffit pour prouver que, même dans ce cas, la droite des contacts subsiste et que son passage à l'infini doit procurer à l'équation de la courbe proposée les mêmes modifications.

Ainsi il est de nouveau prouvé que toute courbe du troisième ordre peut être considérée comme la perspective d'une courbe à centre. D'ailleurs en discutant la situation et la réalité des asymptotes dans l'équation (2), on verra que cette équation renferme cinq formes non réductibles les unes aux autres; de là le théorème de M. Chasles.

La considération de l'équation (2) permet aussi d'établir en quelques mots la propriété des points d'inflexion d'être en ligne droite, et celle des polaires de se rencontrer en un même point.

M. Chasles a compris les deux générations des courbes du troisième ordre sous un seul énoncé qu'il me paraît utile de transcrire :

Ainsi que les courbes du second degré ne peuvent donner lieu qu'à une seule espèce de cône, de même les courbes du troisième degré ne peuvent donner lieu qu'à cinq espèces de cônes ;

En coupant ces cônes d'une certaine manière, on forme les cinq paraboles cubiques ;

Et les coupant d'une autre manière, on forme les cinq courbes qui ont un centre.

Ceci peut donner lieu à quelques remarques. On sait que le cône du second ordre peut être coupé dans une infinité de directions de manière à donner la parabole ordinaire, et dans deux directions seulement de manière à donner le cercle. Mais un cône du troisième ordre ne peut être coupé que dans une ou dans trois directions différentes, de manière à donner soit une parabole, soit une courbe à centre. On sait aussi qu'il est toujours possible de transformer la figure plane formée par un système de deux courbes du second degré en une perspective où ces deux courbes deviennent des cercles (Poncelet). Au contraire il sera impossible en général de transformer un système de deux courbes du troisième ordre en un autre système où chacune de ces deux courbes ait reçu une forme déterminée d'avance, soit parabolique, soit à centre.

(*La suite prochainement.*)