NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Solution géométrique de la question 443

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 261-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__261_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 443

(voir p. 77);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Capitaine de frégate (*).

LEMME I. *Les pieds des normales, abaissées d'un point fixe sur une conique, sont sur une hyperbole équilatère qui passe par le point fixe et par le centre* O *de la conique, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes principaux de cette courbe.* (Poncelet, *Traité des propriétés projectives.*)

Corollaire. Si le point P se meut sur une droite L, les hyperboles équilatères correspondantes à ses positions successives ont quatre points communs, et forment un *faisceau.* Car, indépendamment du centre O de la conique donnée et des deux points situés à l'infini sur leurs asymptotes parallèles, elles ont encore en commun le point d'intersection de la droite L par le diamètre de la conique conjugué à celui qui est perpendiculaire à cette droite.

(*) Chef d'état-major à bord de la canonnière *l'Éclair*, en croisière dans la mer Adriatique.

Remarque. Si la conique donnée est une parabole, l'une des asymptotes de chacune de ces hyperboles équilatères coïncide avec l'axe focal de la parabole. Donc l'un des quatre points communs à toutes les hyperboles qui forment le faisceau se trouve (à l'infini) sur la parabole elle-même.

Lemme II. *Quand un faisceau de coniques passant par quatre points fixes est coupé par une conique fixe, les cordes communes enveloppent une courbe de troisième classe, c'est-à-dire une courbe à laquelle on ne peut mener que trois tangentes par un point quelconque.* (Chasles, *Cours de la Sorbonne.*)

Remarque. Si l'un des quatre points communs aux coniques du faisceau se trouve sur la conique fixe, toute droite passant par ce point est tangente au lieu géométrique, qui, abstraction faite de ce point, se réduit ainsi à une conique.

Problème. *Quel est le lieu du point de rencontre des normales menées à une conique* C *par les deux points où une transversale, mobile autour d'un point* S, *coupe cette conique* (*) ?

Solution. Il suffit de déterminer combien le lieu cherché a de points (réels ou imaginaires) sur une droite quelconque L.

Pour cela, supposons que, de chaque point de cette droite, on abaisse des normales sur la conique. D'après le *corollaire* du lemme I, leurs pieds seront sur une série d'hyperboles équilatères ayant quatre points communs. Donc le lieu cherché possède, sur L, autant de points

(*) Problème du grand Concours de cette année, et qu'une solution récente avait mis dans le domaine public. Tm.

que ces hyperboles et la conique possèdent de cordes communes passant par le point donné S. Or ce nombre est trois, d'après le lemme II. Donc la courbe cherchée est du troisième ordre. Cette courbe passe évidemment par les quatre points où les normales abaissées du point S sur la conique donnée rencontrent cette courbe pour la seconde fois, et aussi par les centres de courbure des points de contact des tangentes issues du point S. Elle n'a qu'une asymptote réelle, dont la direction est perpendiculaire au diamètre conjugué de celui qui passe par le point S.

Corollaire I. Si la conique donnée est une parabole, le lieu géométrique est une conique, puisque la courbe de troisième classe du lemme II se réduit elle-même, dans ce cas, à une conique (*Remarque* du lemme II). On peut dire aussi que, si N est la normale à la parabole menée par le point où cette courbe est rencontrée par la parallèle à l'axe focal issue du point S, tous les points de cette normale font partie du lieu cherché. En effet, tous les diamètres de la parabole peuvent être regardés comme étant des normales menées par le point de cette courbe situé à l'infini, et par conséquent chaque point de N est un point d'intersection de deux normales relatives à une même transversale issue du point S. Donc la courbe du troisième ordre se réduit alors à une conique, si l'on fait abstraction de cette droite, qui constitue une de ses branches, et qui n'est autre chose que l'asymptote du cas général.

Corollaire II. Si le point S est sur l'un des deux axes principaux de la conique donnée, le lieu se réduit encore à une conique, parce que l'axe, sur lequel le point S se trouve, fait partie de la courbe. Et si le point S est le centre de la conique, cette courbe du troisième ordre se compose de trois lignes droites, savoir : les deux axes principaux de la conique et la droite située à l'infini.

Observation. Le théorème n'est pas seulement vrai pour les normales, mais il l'est aussi pour des obliques faisant avec les tangentes à la conique un angle constant et dans le même sens de rotation.

Il est d'ailleurs susceptible d'une généralisation plus grande; car la normale et la tangente sont deux droites conjuguées qui divisent harmoniquement l'angle sous lequel les foyers sont vus du point de contact. Faisant une déformation homographique de la figure, on a ce théorème :

Étant donnés une conique, deux points fixes F, F' *pris dans son intérieur, et un point quelconque* S, *si l'on mène une transversale* Sm *qui coupe la conique aux points* m, m', *puis par le point* m *la droite conjuguée harmonique de la tangente en ce point par rapport aux deux rayons* mF, mF', *et pareillement pour le point* m', *le lieu du point de rencontre de ces deux droites sera une courbe du troisième ordre.*

Et l'on a un théorème corrélatif dont l'énoncé, facile à former, prend une forme plus simple si l'on suppose située à l'infini l'une des deux droites qui correspondent corrélativement aux deux points F, F', c'est-à-dire aux foyers réels de la figure primitive (*).

(*) Quelle est la classe de ces courbes? Tm.