NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Notions élémentaires sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 249-255
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__249_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

Sur les invariants, covariants, discriminants et hyperdéterminants.

---

1. Ces dénominations effrayent encore quelques personnes. Elles désignent des choses et ces choses sont les clefs de la nouvelle analyse et de la nouvelle géométrie. Dans ces nouvelles branches, on raisonne principalement sur des *formes;* elles constituent une théorie de ces formes, une *morphologie.* Cette identification, pour ainsi dire, des formes géométriques et algébriques complète le système cartésien, donne une incommensurable extension, et ouvre à la science de l'espace des horizons inconnus. J'attache une telle importance à ces objets, que, dans leur exposition, je ne chercherai pas à éviter le reproche d'être minutieux et de me répéter. Mon unique but est d'être compris de tous. Je demande seulement qu'on veuille bien lire; car j'avoue ne pas savoir écrire pour ceux

qui ne veulent pas lire. Nous donnons ces notions d'après le dernier ouvrage du Rév. G. Salmon. Comme on ne trouve plus d'éditeurs en France pour ce genre de productions mathématiques, j'essaye de les faire connaître par l'intermédiaire des *Nouvelles Annales*. Connaissez-vous un autre moyen?

I. *Polynômes et équations homogènes.*

2. Dans tout ce qui suit, nous ne nous occuperons que des polynômes entiers et homogènes relativement aux variables. En faisant passer tous les termes d'une équation dans le même membre, on obtient un polynôme égal à zéro. C'est sous cette forme que nous considérerons les équations.

3. Toute équation peut être rendue homogène par l'introduction d'une nouvelle quantité, de valeur quelconque.

Exemple. L'équation

$$ax + b = 0$$

n'est pas homogène; prenant pour inconnue $\frac{x}{y}$, elle se change en

$$ax + by = 0;$$

équation homogène.

De même

$$ax^2 + bx + c = 0$$

devient, par une telle transformation,

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0,$$

qui est homogène;

$$ax + by + cz + d = 0;$$

en remplaçant x, y, z par $\frac{x}{u}, \frac{y}{u}, \frac{z}{u}$, cette équation prend la forme

$$ax + by + cz + du = 0\,;$$

$$ax^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f$$

devient

$$ax^2 + bxy + cx^2 + dyz + exz + fz^2,$$

en introduisant la nouvelle indéterminée z; et de même pour les polynômes de tous degrés et pour un nombre quelconque de variables.

II. *Notation et dénomination des polynômes.*

4. Soit

$$U = ax^2 + 2bxy + cx^2 = (a,\ b)\,(x,\ y)^2.$$

le trinôme U est dit *binaire* parce qu'il ne renferme que deux variables, et *quadratique* parce qu'il est du deuxième degré; on représente ce polynôme de la manière abrégée indiquée par le membre à droite.

Soit encore

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a,\ b,\ c,\ d)\,(x,\ y)^3,$$

U est un polynôme binaire et cubique.

$$\begin{aligned} U &= x^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4 \\ &= (a,\ b,\ c,\ d,\ e)\,(x,\ y)^4 \end{aligned}$$

est un polynôme *binaire biquadratique*; et en général

$$\begin{aligned} U &= ax^n + n_1 bx^{n-1}y + n_2 cx^{n-2}y^2 + n_3 dx^{n-3}y^3 + \ldots \\ &= (a,\ b,\ c,\ d,\ldots)\,(x,\ y)^n, \end{aligned}$$

n_p est un coefficient binomial.

$$\begin{aligned} U &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy \\ &= (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)\,(r,\ y)^2 \end{aligned}$$

est un polynôme ternaire quadratique.

En général, chaque terme d'un polynôme renferme le coefficient multiplié par le nombre polynomial qui convient à ce terme s'il s'agissait du développement d'une puissance. Par exemple, dans le polynôme ternaire cubique, le terme x^2y a pour coefficient numérique 3 et xyz a pour coefficient numérique 6. Il suffit pour connaître ces coefficients de développer $(x+y+z)^3$.

C'est M. Cayley qui a introduit cette notation et ces dénominations, et il nomme *quantic* un polynôme d'un nombre quelconque de variables.

III. *Transformation linéaire des polynômes; module.*

5. Soit

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)(x, y)^2;$$

posons

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y,$$

U prendra la forme

$$U_1 = AX^2 + 2Bxy + Cx^2 = (A, B, C)(x, y)^2.$$

cette transformation se nomme *linéaire*; $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ est le *module* de la transformation.

On a

$$A = a\alpha_1^2 + 2b\alpha_1\alpha_2 + c\alpha_2^2,$$
$$B = a\alpha_1\beta_1 + b[\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1] + c\alpha_2\beta_2,$$
$$C = a\beta_1^2 + 2b\beta_1\beta_2 + c\beta_2^2.$$

Soient, 1°.

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (a, b, c, d)(x, y)^3,$$
$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y,$$

on aura

$$U_1 = AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3 = (A, B, C, D)(X, Y)^3,$$

ou

$$A = (a, b, c, d)(\alpha_1, \alpha_2)^3, \quad D = (a, b, c, d)(\beta_1, \beta_2)^3,$$

$$3B = \beta_1 \frac{dA}{d\alpha_1} + \beta_2 \frac{dA}{d\alpha_2}, \quad 3C = \alpha_1 \frac{dD_3}{d\beta_1} + \alpha_2 \frac{dD}{d\beta_2}.$$

2°.

$$U = (a, b, c, d, e, f)(x, y, z)^2;$$

écrivons

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z,$$
$$y = \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z,$$
$$z = \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z;$$

le module de cette transformation est le déterminant $[\alpha_1 \beta_2 \gamma_3]$; on aura

$$U_1 = (A, B, C, D, E, F)(X, Y)^3;$$

A, B, C, D, E, F sont des fonctions des coefficients a, b, c, d et des α, β, γ, que chacun peut calculer.

Invariants.

6.

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)(x, y)^2,$$

par transformation linéaire on obtient

$$U_1 = AX^2 + 2BX + CY^2.$$

Soit $\varphi(a, b, c)$ une fonction quelconque des coefficients a, b, c de U;

et $\varphi(A, B, C)$ une fonction *semblable* des coefficients de U;

$\varphi(A, B, C)$ est une fonction *implicite* de a, b, c et de α, β, γ, puisque A, B, C sont des fonctions de $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$; si la fonction φ est tellement choisie, que l'on ait $\varphi(A, B, C) = (\alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \beta_1)^p \varphi(a, b, c)$, où p est un nombre entier positif, alors $\varphi(a, b, c)$ est dit un *invariant de* l'expression U.

1[er] *Exemple*. Prenons

$$\varphi(a, b, c) = b^2 - ac,$$

alors

$$\varphi(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = \mathrm{B}^2 - \mathrm{AC};$$

faisant les substitutions (p. 252), on obtient

$$\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)^2 (b^2 - ac);$$

ainsi $b^2 - ac$ est un *invariant* de la fonction

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

et cet invariant est du second *ordre;* car le degré de chaque terme est 2.

2[e] *Exemple*.

$$\mathrm{U} = (a, b, c, d, e)(x, y)^4;$$

prenons

$$\varphi(a, b, c, d, e) = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$\varphi(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}) = \mathrm{AE} - 4\mathrm{BD} + 3\mathrm{C}^2;$$

on aura, les substitutions faites,

$$\mathrm{AE} - 4\mathrm{BD} - 3\mathrm{C}^2 = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^4 (ae - 4bd + 3c^2);$$

ainsi $ae - 4bd + 3c^2$ est un invariant du *second* ordre de cette fonction U; on peut vérifier que

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

est un autre invariant de la même fonction et du *troisième* ordre.

3[e] *Exemple*.

$$\mathrm{U} = (a, b, c, d, e, f)(x, y, z)^2$$

$$= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2exz + 2fxy,$$

$$x = \alpha_1 \mathrm{X} + \beta_1 \mathrm{Y} + \gamma_1 \mathrm{Z},$$

$$y = \alpha_2 \mathrm{X} \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z = \alpha_3 \mathrm{X} \ldots\ldots\ldots\ldots;$$

nous désignerons dorénavant les invariants par la lettre I;

ici on a

$$I = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2,$$

invariant du troisième ordre ; car

$$ABC + 2DEF - AD^2 - BE^2 - CF^2$$
$$= [\alpha_1 \beta_2 \gamma_3]^3 (abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2).$$

Invariants d'un système de polynômes.

7. Soient deux polynômes

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$
$$U' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2;$$

transformons-les linéairement, on obtient

$$U_1 = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$
$$U'_1 = A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2;$$

on a

$$AC' + CA' - 2BB' = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 (ac' + ca' - 2bb');$$

ainsi $ac' + ca' - 2bb'$ est un invariant de ce système U et U'. De même il y a des invariants pour un nombre quelconque de polynômes et de variables.

8. Dans la géométrie des courbes et des surfaces, on effectue principalement des transformations linéaires; les invariants sont alors des fonctions des coefficients qui expriment des propriétés indépendantes du choix des axes. Par exemple, si dans le 3^e^ exemple du § 6 on fait $I = 0$, cela exprime que la conique se réduit à un point ou à deux droites; propriété indépendante du choix des axes. La transformation linéaire est la transformation *homologique* de M. Poncelet.

Il s'agit maintenant de résoudre ce problème : *Étant donné un* quantic, *trouver ses invariants*. Pour obtenir cette solution, il est nécessaire de connaître les *discriminants*.

(*La suite prochainement.*)