FAURE

Considérations générales sur la question 406 (Salmon) (voir p. 224)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 237-241
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__237_1>

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA QUESTION 406 (SALMON)

(voir p. 224);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Étant données trois courbes planes A, B, C *de l'ordre m, trouver le lieu des points de contact des courbes d'ordre m, qui passant par les points d'intersection des courbes* A *et* B *touchent la troisième* C.

Une courbe passant par les intersections de A et B est de la forme $A + \lambda B = 0$, λ représentant une constante arbitraire. Soit x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées *trilitères* du point de contact de cette courbe avec $C = 0$, l'équation de la tangente à cette courbe en ce point est

$$(1) \qquad C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0,$$

x_1, x_2, x_3 désignant les coordonnées courantes, C_1, C_2, C_3 les dérivées de la fonction C par rapport à ces variables respectives, dérivées dans lesquelles on a mis x'_1, x'_2, x'_3 à la place des coordonnées x_1, x_2, x_3. La tangente à la courbe $A + \lambda B = 0$ en ce même point sera pareillement

$$(A_1 + \lambda B_1) x_1 + (A_2 + \lambda B_2) x_2 + (A_3 + \lambda B_3) x_3 = 0;$$

or, ces deux tangentes doivent être identiques; donc μ désignant une constante,

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 + \lambda B_1 + \mu C_1 = 0, \\ A_2 + \lambda B_2 + \mu C_2 = 0, \\ A_3 + \lambda B_3 + \mu C_3 = 0; \end{cases}$$

éliminant λ et μ entre ces équations, le résultat

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

sera le lieu des points de contact des courbes du faisceau $A + \lambda B = 0$ avec la courbe C. La courbe que l'on obtient ainsi est de degré $3(m-1)$, par conséquent par les points d'intersection des courbes A et B, on peut en général mener $3(m-1)$ courbes qui touchent C.

La symétrie de l'équation (3) montre que, *si par les points d'intersection de deux quelconques des courbes* A, B, C *on mène les* $3(m-1)$ *courbes qui touchent la troisième, on obtiendra en tout* $9(m-1)$ *points de contact situés sur la courbe* (3) *d'ordre* $3(m-1)$.

On peut remarquer que la courbe (3) passe, 1° par les points doubles des courbes A, B, C; car les points doubles de la première, par exemple, sont déterminés par les équations $A_1 = A_2 = A_3 = 0$; 2° par les points doubles de toutes les courbes passant par les intersections de deux quelconques d'entre elles A et B. En effet, les points doubles de l'une de ces courbes $A + \lambda B = 0$ sont déterminés par les équations

$$A_1 + \lambda B_1 = 0,$$
$$A_2 + \lambda B_2 = 0,$$
$$A_3 + \lambda B_3 = 0;$$

si elles ont lieu simultanément, l'équation (3) est évidemment vérifiée, en observant qu'aux éléments de la première colonne d'un déterminant on peut ajouter respectivement ceux de la deuxième multipliés par λ; 3° la courbe (3) passe aussi par les points doubles des courbes $A + \lambda B + \mu C = 0$. Cela se voit comme précédemment.

On obtient encore la courbe (3) en cherchant :

1°. Le lieu des points qui ont le même axe harmonique relativement à la courbe C et à l'une de celles du faisceau $A + \lambda B$; car l'équation (1) est l'axe harmonique du point x'_1, x'_2, x'_3 relativement à la courbe C, etc. (*);

2°. Le lieu du point dont les axes harmoniques relatifs aux trois courbes A, B, C passent par un même point;

3°. Le lieu des points doubles des courbes représentées par l'équation $A + \lambda B + \mu C = 0$, où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

Lorsque $m = 2$, on a ce théorème : *Étant données trois coniques, par les intersections de deux quelconques d'entre elles on peut mener trois coniques qui touchent la troisième; on obtient ainsi neuf points de contact situés sur une courbe du troisième degré. Cette courbe passe encore par neuf points déterminés; ce sont les points d'intersection des côtés et des diagonales des quadrilatères inscrits à la fois dans deux quelconques des coniques données.*

Lorsque les trois coniques ou plus généralement les courbes A, B, C passent par un même point, le lieu correspondant passera par ce point. Des cercles situés dans un même plan passent par deux mêmes points situés à l'infini : il résulte de là que si les coniques du théorème précédent deviennent des cercles, le lieu correspondant, qui est toujours du troisième degré, se décomposera en une droite située entièrement à l'infini et en une courbe du second degré qui doit être un cercle, puisque cette courbe doit passer par deux points déterminés situés à l'infini.

De là résulte ce théorème : *Trois cercles étant situés dans un même plan, on peut généralement tracer, par*

(*) L'*axe harmonique* est donné par le théorème de Maclaurin. Tm.

les intersections de deux d'entre eux, deux cercles qui touchent le troisième; on a ainsi six points de contact situés sur un même cercle. Ce cercle coupe orthogonalement les trois cercles donnés.

Cette dernière partie s'aperçoit facilement (*).

Il est donc démontré que si A, B, C représentent trois cercles, l'équation (3) sera le cercle qui les coupe orthogonalement.

Soit

$$(x_1 - \alpha x_3)^2 + (x_2 - \beta x_3)^2 = r^2 x_3^2$$

l'un de ces cercles A; on a des équations analogues pour les deux autres B et C; l'équation (3) devient

$$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha\, x_3 & x_2 - \beta\, x_3 & -\alpha\, x_1 - \beta\, x_2 + x_3(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) \\ x_1 - \alpha' x_3 & x_2 - \beta' x_3 & -\alpha' x_1 - \beta' x_2 + x_3(\alpha'^2 + \beta'^2 - r'^2) \\ x_1 - \alpha'' x_3 & x_2 - \beta'' x_3 & -\alpha'' x_1 - \beta'' x_2 + x_3(\alpha''^2 + \beta''^2 - r''^2) \end{vmatrix} = 0;$$

développant, on a

$$\sum [\alpha'' x_1 + \beta'' x_2 - x_3(\alpha''^2 + \beta''^2 - r''^2]$$
$$\times [x_1(\beta - \beta') + x_2(\alpha' - \alpha) + x_3(\alpha\beta' - \beta\alpha')] = 0(^{**});$$

le premier facteur est la polaire de l'origine relativement au cercle C; le second est la droite qui joint les centres des cercles A et B. Désignons par

$$a = b = c = 0$$

les équations des droites qui joignent les centres des cercles B et C, C et A, A et B, et par

$$a' = b' = c' = 0$$

(*) C'est à démontrer. TM.

(**) On divise par le facteur x_3. TM.

les polaires de l'origine relativement aux cercles A, B, C, l'équation (3) prendra la forme

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

(Brioschi, *voir* p. 230.)

On peut interpréter autrement l'équation du cercle orthogonal à trois autres; en effet, on ne changera pas le déterminant précédent en ajoutant aux éléments de la troisième colonne multipliés par x_3, ceux de la première et de la deuxième multipliés respectivement par x_1 et x_2. On a ainsi

$$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha\, x_3 & x_2 - \beta\, x_3 & A \\ x_1 - \alpha'\, x_3 & x_2 - \beta'\, x_3 & B \\ x_1 - \alpha''\, x_3 & x_2 - \beta''\, x_3 & C \end{vmatrix} = 0.$$

Le point x_1, x_2, x_3 appartenant au cercle orthogonal, A sera le carré de la tangente menée de ce point au cercle A, de même B sera le carré de la tangente menée du même point au cercle B, etc., le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 - \alpha\, x_3 & x_2 - \beta\, x_3 \\ x_1 - \alpha'\, x_3 & x_2 - \beta'\, x_3 \end{vmatrix}$$

indique le double de l'aire du triangle qui a pour sommets le point (x_1, x_2, x_3) et les centres des cercles A et B.

Désignons donc par a, b, c les longueurs des tangentes menées d'un point du cercle orthogonal aux trois cercles A, B, C, par a', b', c' les aires des triangles ayant un de leurs sommets en ce point et les deux autres aux centres B et C, C et A, A et B. Pour tous les points du cercle orthogonal on aura la relation géométrique

$$a^2.a' + b^2.b' + c^2.c' = 0.$$