J. DE VIRIEU

Sur la série de Schwab

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 234-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__234_1>

SUR LA SÉRIE DE SCHWAB;

PAR J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

1. Dans une note ajoutée à un article de M. Farcy (*Nouvelles Annales,* t. III, p. 582), M. le Rédacteur s'exprime ainsi :

« Il serait intéressant de trouver la limite de la série » de Schwab par un moyen direct (p. 585). »

Cette limite se déduit du théorème suivant :

Soit une série illimitée

$$\text{(A)} \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{2n+2},\ a_{3n+3},$$

où le premier terme étant nul ou positif et le deuxième plus grand que le premier, chaque terme *impair* est moyen *arithmétique,* chaque terme *pair* est moyen *géométrique* entre les deux termes qui le précèdent immédiatement; les termes impairs forment une série croissante, les termes impairs une série décroissante.

Ces deux dernières séries ont une même limite qui est la limite de la série (A). Cette limite est égale au double de l'inverse du plus petit des arcs qui, dans une circonférence dont le rayon est $\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}$ sont sous-tendus par une corde égale à $\frac{2}{a_1}$. C'est ce que nous allons démontrer.

2. Les termes de la série (A) se déduisent des deux premiers au moyen des formules

$$(\mathrm{B}) \qquad a_{2n+2} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n}}{2}, \qquad a_{2n+3} = \sqrt{a_{2n+2}\, a_{2n+1}}.$$

3. Soit R le rayon d'une circonférence, U un arc de cette circonférence plus petit que le quadrant, R, U étant des quantités déterminées par

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{R}} \cot\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}}\right), \qquad a_1 = \frac{1}{\mathrm{R}} \operatorname{coséc}\left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{R}}\right).$$

En désignant par φ un angle compris entre o et $\frac{1}{2}\pi$, on a

$$a_0 = \frac{1}{\mathrm{R}} \cot\varphi, \quad a_1 = \frac{1}{\mathrm{R}} \operatorname{coséc}\varphi, \quad \mathrm{U} = \mathrm{R}\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{a_0}{a_1}; \quad \sin\varphi = \frac{1}{a_1}\sqrt{a_1^2 - a_0^2}, \quad \mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}.$$

4. Les formules (B) donnent de suite

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{R}} \cot\left(\frac{1}{2}\varphi\right), \qquad a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{R}} \operatorname{coséc}\left(\frac{1}{2}\varphi\right).$$

On en déduit d'abord par induction

$$(1) \qquad a_{2n} = \frac{1}{\mathrm{R}} \cdot \frac{1}{2^n} \cot\left(\frac{1}{2^n}\varphi\right),$$

$$(2) \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{\mathrm{R}} \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{coséc}\left(\frac{1}{2^n}\varphi\right),$$

formules dont la généralité est ensuite démontrée, en faisant voir au moyen des formules (B), que si elles sont vraies pour $n = \nu$, elles le sont également pour $n = \nu + 1$.

Les formules (1) et (2) donnent

$$(3) \qquad a_{2n+1} - a_{2n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2^{n+1}} \varphi\right).$$

5. Les formules (1), (2), (3) peuvent s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(4) \qquad a_{2n} = \frac{\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R}\right)} \cdot \frac{1}{U},$$

$$(5) \qquad a_{2n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R}\right)} \cdot \frac{1}{U},$$

$$(6) \qquad a_{2n+1} - a_{2n} = \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{U}{R}\right) \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{U}{R}\right) \times \frac{1}{U}.$$

Sous cette forme, elles montrent que, en faisant tendre n vers l'infini, a_{2n} croît constamment, a_{2n+1} décroît constamment; $a_{2n+1} - a_{2n}$ décroît constamment et indéfiniment.

De plus la limite de la série (A) est $\frac{1}{U}$ ou $\frac{2}{2U}$.

Or $2U$ est le plus petit des arcs qui dans une circonférence de rayon $\frac{1}{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}$ ont pour corde $R \times 2 \sin\varphi$ ou $\frac{2}{a_1}$; ce qui démontre le théorème énoncé au commencement de cet article.

La série de Schwab se déduit de la série (A) en posant

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

on a

$$2U = \pi$$

et pour limite $\frac{2}{\pi}$.